Αριθμητική Ανάλυση και Εφαρμογές

Διδάσκων: Δημήτριος Ι. Φωτιάδης

Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών

Ιωάννινα 2017-2018

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Εισαγωγή

- Έστω ότι η $f(x)$ είναι μία φραγμένη συνάρτηση στο πεπερασμένο διάστημα $a \le x \le b$ και ότι διαιρούμε το κλειστό διάστημα $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα με $(n-1)$ ενδιάμεσα σημεία:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

όπου το σύνολο $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ ονομάζεται διαμέριση του κλειστού διαστήματος $[a, b]$.

- Έστω ότι ξ_i είναι κάποιο σημείο στο i -οστό υποδιάστημα $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ έτσι ώστε $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$.
- Το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i = f(\xi_1)\delta_1 + f(\xi_2)\delta_2 + \ldots + f(\xi_n)\delta_n, \quad (1)$$

ονομάζεται **άθροισμα κατά Riemann** και εξαρτάται από τη διαμέριση και την επιλογή των σημείων ξ_i.

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Εισαγωγή

- Η συνάρτηση $f\left(x\right)$ είναι **ολοκληρώσιμη** στο διάστημα $\left[a, b\right]$ αν:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i, \text{ όπου } \delta=\max_i \delta_i. \quad (2)$$

- Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνάρτησης $f\left(x\right)$ μεταξύ των a και b.
- Η συνάρτηση $f\left(x\right)$ λέγεται **υπό ολοκλήρωση συνάρτηση**.
- Τα a και b ονομάζονται, αντίστοιχα, **κάτω και πάνω όρια της ολοκλήρωσης**.
- Η διαδικασία με την οποία παίρνουμε το παραπάνω όριο ονομάζεται **ολοκλήρωση κατά Riemann**.

Εισαγωγή

- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και αν $F(x)$ είναι κάποια συνάρτηση που έχει την $f(x)$ ως παράγωγο τότε συμφώνα με το **θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού** ισχύει ότι:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \equiv F(b) - F(a). \quad (3)$$

- Η συνάρτηση $F(x)$ ονομάζεται **παράγουσα** ή **αντιπαράγωγος** της συνάρτησης $f(x)$.
- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε ισχύει ότι:

$$F(x) = \varphi(x) + c = \int_a^x f(t)dt + c.$$

- Η σταθερά c ονομάζεται **σταθερά ολοκλήρωσης**.
- Κάθε μία από τις συναρτήσεις $F(x)$ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα**.

Εισαγωγή

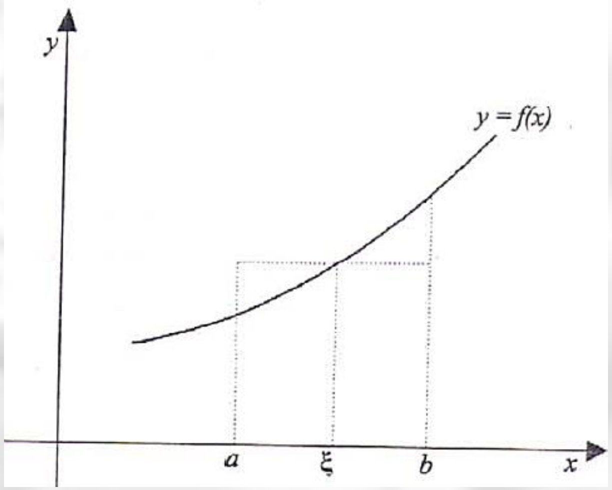
- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε από το **θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού** υπάρχει κάποιο σημείο ξ στο διάστημα $[a, b]$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \text{ όπου } a \le \xi \le b. \quad (4)$$

- Η **μέση τιμή** της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$ είναι:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \quad (5)$$

Το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ εκφράζει εμβαδόν και ισούται με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου ύψους $f(\xi)$.



Εισαγωγή

- Για να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx,$ όπου η $f(x)$ είναι μία πραγματική φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση, χρησιμοποιώντας αναλυτικές μεθόδους, χρειάζεται να βρεθεί σε αναλυτική (κλειστή μορφή) η αντίστοιχη έκφραση της παράγουσας $F(x)$.

- Η αριθμητική ολοκλήρωση προσεγγίζει το ολοκλήρωμα I με τύπους ολοκλήρωσης της μορφής:

$$Q_{n+1}(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(w_i), \ (6)$$

όπου τα w_i είναι πραγματικοί αριθμοί.

- Ο τύπος (6) ονομάζεται κανόνας υπολογισμού και οι αριθμοί $w_i, \, i = 0(1)n$ ονομάζονται βάρη ή συντελεστές του κανόνα υπολογισμού.

Σφάλμα αριθμητικής ολοκλήρωσης

Θα εξετάσουμε το σφάλμα που δημιουργείται αν αντικαταστήσουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ με το ολοκλήρωμα $\int_a^b P_n(x)dx$ του πολυωνύμου παρεμβολής $P_n(x)$, για τις δύο περιπτώσεις όπου τα σημεία παρεμβολής είναι μη-ισαπέχοντα και ισαπέχοντα.

Σφάλμα για μη-ισαπέχοντα σημεία παρεμβολής

- Υποθέτουμε ότι:
  - η $f\left(x\right)$ είναι μία συνάρτηση που είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $\left[a, b\right]$ και
  - τα ξένα μεταξύ τους σημεία παρεμβολής $x_i, i = 0\left(1\right)n$ βρίσκονται στο κλειστό διάστημα $\left[a, b\right]$ με αντίστοιχες συναρτησιακές τιμές $f_i = f\left(x_i\right)$.

- Με βάση το Θεώρημα 6.2 ισχύει ότι:

$$\varepsilon_n = \int_a^b P_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx = -\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi_x)L(x)dx. \quad \left(1\right)$$

- Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο το πολύ n βαθμού τότε το σφάλμα θα είναι μηδέν, επειδή σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $f^{(n+1)}(\xi_x) = 0$.

Σφάλμα για μη-ισαπέχοντα σημεία παρεμβολής

- Ο τύπος (1) δεν έχει πρακτικό ενδιαφέρον γιατί ο όρος $f^{(n+1)}(\xi_x)=0$ δεν μπορεί γενικά να υπολογιστεί αφού το ξ_x είναι άγνωστο.
- Σε ειδικές περιπτώσεις ο παραπάνω τύπος μπορεί να απλοποιηθεί.
- Μία ειδική περίπτωση είναι όταν η συνάρτηση $L(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο μέσα στο διάστημα $[a, b]$.
- Τότε, προκύπτει ότι:

$$\varepsilon_n = -\frac{f^{n+1}(\eta)}{(n+1)!}\int_a^b L(x)dx. \quad (2)$$

όπου η είναι ένα άγνωστο σημείο του διαστήματος:

$$\Xi = \left[\min\left\{x, x_{0,}...x_n, a, b\right\}, \max\left\{x, x_{0,}...x_n, a, b\right\}\right].$$

Σφάλμα για ισαπέχοντα σημεία παρεμβολής

- Έστω ότι τα σημεία παρεμβολής είναι ισαπέχοντα, δηλαδή ισχύει:

$$x_i = x_0 + ih, \text{ για όλα τα } i = 0(1)n. \quad (3)$$

- Αν t είναι ο λόγος $\left(x - x_0\right)/h$ τότε έχουμε ότι:

$$x = x_0 + th. \quad (4)$$

- Επομένως: $\prod_{i=0}^{n}\left(x - x_i\right) = \left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\ldots\left(x - x_n\right)$

$$= \left(x - x_0\right)\left(x - \left(x_0 + h\right)\right)\ldots\left(x - \left(x_0 + nh\right)\right)$$

$$= \left(x - x_0\right)\left(\left(x - x_0\right) - h\right)\ldots\left(\left(x - x_0\right) - nh\right)$$

$$= th\left(th - h\right)\ldots\left(th - nh\right)$$

$$= th\left(t - 1\right)h\ldots\left(t - n\right)h$$

$$= h^{n+1}t\left(t - 1\right)\ldots\left(t - n\right).$$

Σφάλμα για ισαπέχοντα σημεία παρεμβολής

- Τελικά, έχουμε ότι:

$$\prod_{i=0}^{n}\left(x-x_i\right)=h^{n+1}\prod_{i=0}^{n}\left(t-i\right).\ (5)$$

- Στη συνέχεια διαφορίζοντας τη Σχέση (4) έχουμε ότι:

$$dx=hdt.$$

- Λαμβάνοντας υπόψη ότι το t μεταβάλλεται μεταξύ μηδέν και n, η Σχέση (1) γράφεται ως εξής:

$$\varepsilon_n=\frac{h^{n+2}}{\left(n+1\right)!}\int_0^n\prod_{i=0}^{n}\left(t-i\right)f^{(n+1)}\left(\xi_t\right)dt.\ (6)$$

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Σφάλμα για ισαπέχοντα σημεία παρεμβολής

- Αν η συνάρτηση $f\left(x\right)$ είναι $\left(n+1\right)$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη όταν το n είναι περιττός και $\left(n+2\right)$ φορές παραγωγίσισμη όταν το n είναι άρτιος τότε ισχύει ότι:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} -\dfrac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) \displaystyle\int_0^n \prod_{i=0}^{n} (t-i)\,dt, & \text{για } n \text{ περιττό,} \\ -\dfrac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\eta) \displaystyle\int_0^n \prod_{i=0}^{n+1} (t-i)\,dt, & \text{για } n \text{ άρτιο,} \end{cases} \qquad (8)$$

όπου η είναι ένα άγνωστο σημείο του διαστήματος $\left[a, b\right]$ και

$$\varepsilon_n = \begin{cases} -\dfrac{\varepsilon_n(x^{n+1})}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta), & \text{για } n \text{ περιττό,} \\ -\dfrac{\varepsilon_n(x^{n+2})}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\eta), & \text{για } n \text{ άρτιο,} \end{cases} \qquad (9)$$

όπου το $\varepsilon_n(x^k)$ εκφράζει το σφάλμα αποκοπής στην περίπτωση όταν $f(x) = x^k$.

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Σφάλμα για ισαπέχοντα σημεία παρεμβολής

- Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι για κάθε περίπτωση συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$, τότε υποθέτοντας ότι $[a, b] \equiv [x_0, x_n]$ για διάφορες τιμές του n, έχουμε ότι:

n	1	2	3	4	6	8
ε_n	$\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\eta)$	$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta)$	$\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\eta)$	$\frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\eta)$	$\frac{9h^9}{1400} f^{(8)}(\eta)$	$\frac{2368h^{11}}{467775} f^{(10)}(\eta)$

όπου το η είναι ένα άγνωστο σημείο του διαστήματος $[x_0, x_n]$.

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

- Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης που δημιουργούνται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα παρεμβολής των οποίων τα $(n+1)$ σημεία παρεμβολής x_i, $i=0(1)n$ ισαπέχουν.
- Υποθέτουμε ότι η πραγματική συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ και ότι δίνονται τα ισαπέχοντα σημεία:

$$a \le x_0 < x_1 < .... < x_n \le b,$$

όπου $x_i = x_0 + ih,$ για $i = 0(1)n.$

- Υποθέτουμε ότι είναι γνωστές οι αντίστοιχες συναρτησιακές τιμές $f_i = f(x_i)$ για $i = 0(1)n$ και ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

- Αν και τα δύο άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a, b]$ είναι σημεία παρεμβολής για το αντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολής που θα χρησιμοποιήσουμε, τότε οι αντίστοιχοι τύποι της αριθμητικής ολοκλήρωσης των Newton-Cotes που θα προκύψουν ονομάζονται **κλειστοί**.

- Αν κανένα από τα δύο άκρα δεν είναι σημείο παρεμβολής, τότε έχουμε την περίπτωση των **ανοικτών** τύπων.

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

Κλειστοί τύποι των Newton – Cotes

- Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος :

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx.$$

- Υποθέτουμε ότι:
  - η συνάρτηση στο παραπάνω ορισμένο ολοκλήρωμα δίνεται σε $n+1$ σημεία $x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ που ισαπέχουν και
  - για την προσέγγιση της $f(x)$ χρησιμοποιούμε το πολυώνυμο παρεμβολής $P_n\left(x\right)$ των προς τα εμπρός διαφορών των Gregory – Newton.
- Το πολυώνυμο αυτό δίνεται ως εξής:

$$P_n(x)\Big|_{x=x_0+sh} = p_n(s) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \ldots + \binom{s}{n}\Delta^n f_0. \ (1)$$

- Ανάλογα με το βαθμό n του πολυωνύμου παρεμβολής που χρησιμοποιείται, προκύπτουν διάφοροι τύποι των Newton – Cotes.

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

Κλειστοί τύποι των Newton – Cotes

- Για $n=1$ έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx = \int_0^1 p_1(s)hds$$

$$= \int_0^1 \left(f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_0 \right) hds = h\int_0^1 \left(f_0 + s\Delta f_0 \right) ds$$

$$= h\left(sf_0 + \frac{s^2}{2}\Delta f_0 \right)\Bigg|_0^1 = h\left(f_0 + \frac{1}{2}\left(f_1 - f_0 \right) \right).$$

- Τελικά προκύπτει ο παρακάτω τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης με το αντίστοιχο σφάλμα αποκοπής του:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f_0 + f_1 \right],\ \varepsilon_1 = \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\eta).\ \left(2\right)$$

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

Κλειστοί τύποι των Newton – Cotes

- Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως **κανόνας του τραπεζίου**, του οποίου το τοπικό σφάλμα αποκοπής είναι:

$$\varepsilon_1 = \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\eta), \text{ όπου } \eta \in [x_0, x_1].$$

- Ο κανόνας του τραπεζίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της του ορισμένου ολοκληρώματος της συνάρτησης $f(x)$, χωρίζοντας το διάστημα ολοκλήρωσης σε k διαδοχικά ίσα διαστήματα μήκους h.

- Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x_k} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

Κλειστοί τύποι των Newton – Cotes

- Αντικαθιστώντας τον κάθε όρο του δεύτερου μέλους με τον κατά προσέγγιση ίσο του, έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f_0 + f_1 \right] + \frac{h}{2}\left[f_1 + f_2 \right] + \dots + \frac{h}{2}\left[f_{k-1} + f_k \right],$$

που μπορεί να γραφεί ως εξής:

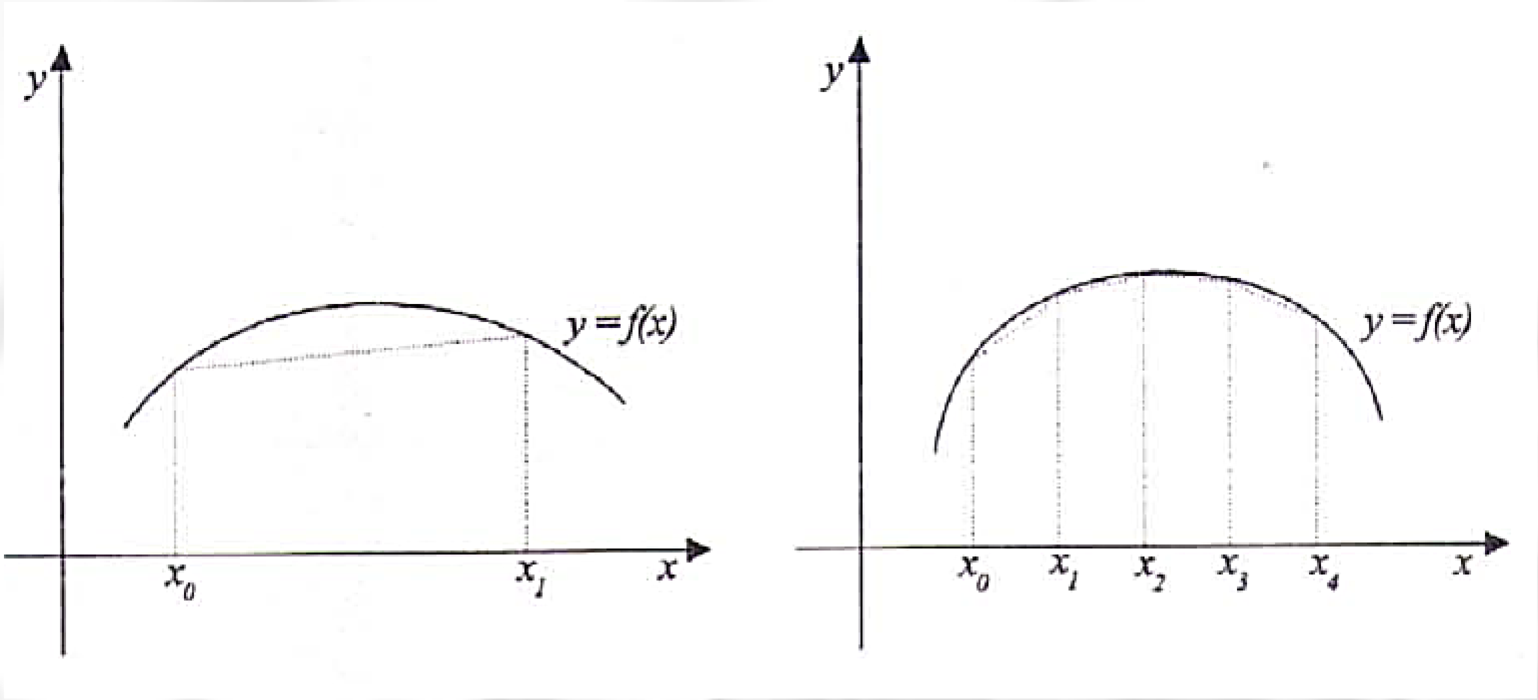
$$\int_{x_0}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{k-1} + f_k \right]. \quad (3)$$

- Ο παραπάνω τύπος καλείται **γενικευμένος κανόνας του τραπεζίου**.

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

Κλειστοί τύποι των Newton – Cotes



Οι γεωμετρικές ερμηνείες του κανόνα του τραπεζίου και του γενικευμένου κανόνα του τραπεζίου.

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

Κλειστοί τύποι των Newton – Cotes

- Για $n=2$ έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = \int_0^2 p_2(s)hds$$

$$= \int_0^2 \left(f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 \right) hds$$

$$= h\left[2f_0 + 2(f_1 - f_0) + \frac{1}{3}(f_2 - 2f_1 + f_0) \right].$$

- Τελικά προκύπτει ο παρακάτω τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης με το αντίστοιχο σφάλμα αποκοπής του:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2 \right], \; \varepsilon_2 = \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta). \; (4)$$

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

Κλειστοί τύποι των Newton – Cotes

- Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως **ο κανόνας του** $1/3$ **του Simpson** του οποίου το τοπικό σφάλμα αποκοπής είναι:

$$\varepsilon_2 = \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta), \text{ όπου } \eta \in [x_0, x_2].$$

- Ο κανόνας του $1/3$ του Simpson μπορεί να επεκταθεί για τον υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος όπου το διάστημα ολοκλήρωσης έχει χωρισθεί σε $2k$ διαδοχικά ίσα με h διαστήματα.
- Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx.$$

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

Κλειστοί τύποι των Newton – Cotes

- Αντικαθιστώντας τον κάθε όρο του δεύτερου μέλους με τον κατά προσέγγιση ίσο του, έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right] + \frac{h}{3}\left[f_2 + 4f_3 + f_4\right] + \cdots + \frac{h}{3}\left[f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}\right].$$

που μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}\right]. \quad (5)$$

- Ο παραπάνω τύπος καλείται **γενικευμένος κανόνας του** $1/3$ **του Simpson**.

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

Κλειστοί τύποι των Newton – Cotes

- Για $n=3$ προκύπτει ο παρακάτω τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης με το αντίστοιχο σφάλμα αποκοπής του:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left[f_0+3f_1+3f_2+f_3\right], \quad \varepsilon_3=\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\eta). \quad (6)$$

- Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως κανόνας των $3/8$ του οποίου το τοπικό σφάλμα αποκοπής είναι:

$$\varepsilon_3=\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\eta), \text{ όπου } \eta\in\left[x_0,x_3\right].$$

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

Κλειστοί τύποι των Newton – Cotes

- Ο κανόνας των $3/8$ μπορεί να επεκταθεί για τον υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος όπου το διάστημα ολοκλήρωσης έχει χωρισθεί σε $3k$ διαδοχικά ίσα με h διαστήματα.

$$\int_{x_0}^{x_{3k}} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\begin{bmatrix} f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + \cdots + \\ + 2f_{3k-3} + 3f_{3k-2} + 3f_{3k-1} + f_{3k} \end{bmatrix}.$$

Ο τύπος αυτός καλείται **γενικευμένος κανόνας των** $3/8$.

- Για $n = 4$ έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{45}\left[14f_0 + 64f_1 + 24f_2 + 64f_3 + 14f_4\right], \quad \varepsilon_4 = \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\eta).$$

Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως **κανόνας του Bode**.

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

Κλειστοί τύποι των Newton – Cotes

- Για $n=5$ έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx \approx \frac{5h}{288}\left[19 f_0 + 75 f_1 + 50 f_2 + 50 f_3 + 75 f_4 + 19 f_5\right], \ \varepsilon_5 = \frac{275h^7}{12096} f^{(6)}(\eta).$$

- Για $n=6$ έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx \approx \frac{h}{140}\left[41 f_0 + 216 f_1 + 27 f_2 + 272 f_3 + 27 f_4 + 216 f_5 + 41 f_6\right], \ \varepsilon_6 = \frac{9h^9}{1400} f^{(8)}(\eta).$$

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

Ανοικτοί τύποι των Newton – Cotes

- Οι ανοικτοί τύποι ολοκλήρωσης σχηματίζονται όταν και τα δύο άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a, b]$ δεν είναι σημεία παρεμβολής.
- Χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Gregory-Newton, που ορίζονται από τα σημεία που βρίσκονται στο διάστημα ολοκλήρωσης με εξαίρεση τα άκρα a και b μπορούμε να βρούμε αντίστοιχους ανοικτούς τύπους.
- Δίνουμε τους ανοικτούς τύπους που σχηματίζονται για τιμές $n = 3,\ 4,\ 5$ και 6.

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

Ανοικτοί τύποι των Newton – Cotes

- Για $n = 3$ έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{2}\left[f_1 + f_2 \right], \ \varepsilon_3 = -\frac{3h^3}{4} f^{(2)}(\eta).$$

- Για $n = 4$ έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{4h}{3}\left[2 f_1 - f_2 + 2 f_3\right], \ \varepsilon_4 = -\frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\eta).$$

Ο παραπάνω τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι γνωστός ως **τύπος του Milne**.

Ολοκλήρωση κατά Newton – Cotes

Ανοικτοί τύποι των Newton – Cotes

- Για $n=5$ έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx \approx \frac{5h}{24}\left[11f_1 + f_2 + f_3 + 11f_4\right],\ \ \varepsilon_5 = -\frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\eta).$$

- Για $n=6$ έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx \approx \frac{3h}{10}\left[11f_1 - 14f_2 + 26f_3 - 14f_4 + 11f_5\right],\ \ \varepsilon_6 = -\frac{41h^7}{140} f^{(6)}(\eta).$$

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Ολοκλήρωση κατά Romberg

- Έστω ότι θέλουμε να βρούμε μία προσέγγιση για την τιμή του ολοκληρώματος :

$$I = \int_a^b f\left(x\right)dx$$

- Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε τις τιμές $f_i = f\left(x_i\right)$ για τα ισαπέχοντα σημεία $x_i = x_0 + ih$ για $i = 0, 1, 2$ και ότι $\left[a, b\right] = \left[x_0, x_2\right]$.

- Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον τύπο του τραπεζίου και χρησιμοποιώντας βήμα $2h$ μπορούμε να πάρουμε την παρακάτω προσεγγιστική τιμή:

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx h\left[f_0 + f_2\right].\ \left(1\right)$$

Ολοκλήρωση κατά Romberg

- Αν χρησιμοποιήσουμε το βήμα h θα πάρουμε την ακόλουθη προσέγγιση:

$$I_2 = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f_0 + f_1 \right] + \frac{h}{2}\left[f_1 + f_2 \right],$$

η οποία μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$I_2 = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + f_2 \right]. \quad (2)$$

- Αν χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω γραμμικό συνδυασμό των προσεγγίσεων I_1 και I_2 θα έχουμε:

$$\frac{4I_2 - I_1}{3} = \frac{2h\left(f_0 + 2f_1 + f_2 \right) - h\left(f_0 + f_2 \right)}{3}.$$

Ολοκλήρωση κατά Romberg

- Από την τελευταία σχέση μπορούμε να πάρουμε ότι:

$$I_3 \approx \frac{4I_2 - I_1}{3} = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4 f_1 + f_2 \right]. \;(3)$$

- Το σφάλμα αποκοπής του κανόνα του τραπεζίου:

$$\varepsilon_1 = \frac{b-a}{12} h^2 f^{(2)}(\eta), \quad \eta \in \left(a, b\right),$$

είναι περίπου ανάλογο του h^2, ενώ το σφάλμα αποκοπής του τύπου του Simpson:

$$\varepsilon_2 = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in \left(a, b\right),$$

είναι περίπου ανάλογο του h^4.

Ολοκλήρωση κατά Romberg

- Έτσι, χρησιμοποιώντας ένα γραμμικό συνδυασμό δύο προσεγγίσεων με τάξη ακρίβειας $O\left(h^2\right)$, μπορούμε να βρούμε μία προσέγγιση του ολοκληρώματος με τάξη ακρίβειας $O\left(h^4\right)$.

- Αφού χρησιμοποιήσαμε έναν τύπο του οποίου το σφάλμα αποκοπής είναι ανάλογο του h^2, τότε οι προσεγγιστικές τιμές $I_1 + I_2$ θα έχουν σφάλματα:

$$\varepsilon_1 \approx c(2h)^2, \ \varepsilon_2 \approx c(h)^2,$$

  για κάποια σταθερά c.

- Από τα παραπάνω προκύπτει:

$$\varepsilon_2 \approx \frac{\varepsilon_1}{4}.$$

Ολοκλήρωση κατά Romberg

- Θεωρώντας ότι η τιμή του ολοκληρώματος I δίνεται από την προσεγγιστική τιμή συν το αντίστοιχο σφάλμα μπορούμε να σχηματίσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$I = I_1 + \varepsilon_1, \ (4)$$
$$I = I_2 + \varepsilon_2. \ (5)$$

- Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω εξισώσεις προκύπτει:

$$I_2 - I_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 4\varepsilon_2 - \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_2 = \frac{I_2 - I_1}{3}.$$

- Αντικαθιστώντας το ε_2 στη Σχέση (5) του παραπάνω συστήματος έχουμε ότι:

$$I \approx I_2 + \frac{I_2 - I_1}{3} = \frac{4I_2 - I_1}{3}, \ (6)$$

που εκφράζει το γραμμικό συνδυασμό που χρησιμοποιήσαμε.

Ολοκλήρωση κατά Romberg

- Παρατηρούμε ότι η σύγκριση των δύο αποτελεσμάτων $I_1 + I_2$ δίνει μία εκτίμηση του υπόλοιπου σφάλματος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως διόρθωση στην προσεγγιστική τιμή I_2.

- Επομένως, αν ο τύπος που χρησιμοποιούμε έχει σφάλμα ανάλογο του h^m για $m \neq 0$ τότε ισχύει ότι:

$$I \approx I_2 + \frac{I_2 - I_1}{2^m - 1} = \frac{2^m I_2 - I_1}{2^m - 1}, \; (7)$$

όπου ο παραπάνω τύπος δίνει μία νέα τιμή για το ολοκλήρωμα I με σφάλμα ανάλογο του h^{2m+2}.

Ολοκλήρωση κατά Romberg

- Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως **διαδικασία του Richardson**.
- Με βάση τη διαδικασία του Richardson μπορούμε να δώσουμε μία επαναληπτική μέθοδο για την κατασκευή διαφόρων ακολουθιών οι οποίες συγκλίνουν στην τιμή του ολοκληρώματος.
- Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως **μέθοδος του Romberg**.
- Η ολοκλήρωση κατά Romberg συνίσταται στην επαναληπτική εφαρμογή της διαδικασίας του Richardson, στους γενικευμένους κανόνες των Newton-Cotes και συνήθως στο γενικευμένο κανόνα του τραπεζίου.
- Η επαναληπτική αυτή εφαρμογή συντελεί στη συνεχή μείωση του σφάλματος εφαρμόζοντας τον τύπο (7).

Ολοκλήρωση κατά Romberg

- Έστω ότι εφαρμόζοντας τον κανόνα του τραπεζίου με συνεχή υποδιπλασιασμό του βήματος h παίρνουμε τις τιμές:

$$R_1^0, R_2^0, R_3^0, R_4^0, \ \ldots.$$

- Το σφάλμα σε αυτή την περίπτωση είναι ανάλογο του h^2.

- Επομένως, με εφαρμογή του τύπου (7) με $m = 2$ σε κάθε ζεύγος διαδοχικών τιμών $\left\{R_i^0, R_{i+1}^0\right\}, i = 1, 2, \ldots$ παίρνουμε τις τιμές:

$$R_1^1, R_2^1, R_3^1, R_4^1, \ \ldots.$$

- Επειδή, όμως, το σφάλμα είναι ανάλογο του h^4, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο (7) με $m = 4$ σε κάθε ζεύγος διαδοχικών τιμών $\left\{R_i^1, R_{i+1}^1\right\}, i = 1, 2, \ldots$ και να πάρουμε τις τιμές:

$$R_1^2, R_2^2, R_3^2, R_4^2, \ \ldots.$$

- Οι επαναλήψεις συνεχίζονται μέχρι να βρούμε την τιμή του ολοκληρώματος με την επιθυμητή ακρίβεια.

Ολοκλήρωση κατά Romberg

- Η συστηματική εύρεση των διαδοχικών επαναλήψεων γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα του Romberg:

	$m=2$	$m=4$	$m=6$	$m=8$
R_1^0				
R_2^0	R_1^1			
R_3^0	R_2^1	R_1^2		
R_4^0	R_3^1	R_2^2	R_1^3	
R_5^0	R_4^1	R_3^2	R_2^3	R_1^4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underline{R_k^0}$	$\underline{R_{k-1}^1}$	$\underline{R_{k-2}^2}$	$\underline{R_{k-3}^3}$	$\underline{R_{k-4}^4}$

Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών

- Η έκφραση του τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης μπορεί να προκαθοριστεί με έναν επιθυμητό γραμμικό συνδυασμό των τιμών της συνάρτησης ή και των παραγώγων της.
- Αν υποθέσουμε ότι έχουμε $(n+1)$ συντελεστές που πρέπει να προσδιοριστούν, τότε σύμφωνα με τη **μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών** πρέπει ο ζητούμενος τύπος να είναι ακριβής για όλα τα παρακάτω στοιχειώδη πολυώνυμα:

$$f(x) = x^i \text{, για όλα τα } i = 0(1)n. \quad (1)$$

- Ο ζητούμενος τύπος, λόγω γραμμικότητας, θα είναι ακριβής όταν εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου με n.

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών

- Η λύση του συστήματος (1) μας παρέχει τους ζητούμενους $(n+1)$ συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού.

- Αν το σχηματιζόμενο σύστημα δεν έχει μία ή πεπερασμένου πλήθους λύσεις αλλά έχει άπειρες λύσεις, τότε επεκτείνουμε το σύστημα κατάλληλα, απαιτώντας ο ζητούμενος τύπος να είναι ακριβής και για τα επόμενα στοιχειώδη πολυώνυμα x^{n+1}, x^{n+2} κ.ο.κ.

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Ολοκλήρωση για μη-ισαπέχοντα σημεία

- Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_a^b g(t)dt,$$

όπου τα a και b είναι γνωστοί πεπερασμένοι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a < b$ και ότι η συνάρτηση $g(t)$ δίνεται με την αναλυτική έκφρασή της ή ότι δίνονται οι τιμές της σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του διαστήματος ολοκλήρωσης.

- Είναι χρήσιμο να αναφερόμαστε πάντα στο ίδιο διάστημα ολοκλήρωσης $[-1, 1]$ και όχι στο οποιοδήποτε διάστημα $[a, b]$.
- Συνεπώς, αν χρησιμοποιήσουμε το γραμμικό μετασχηματισμό $t = \mu x + \gamma$, και απαιτήσουμε να ισχύει $t = a$, όταν $x = -1$ και $t = b$ όταν $x = 1$ θα έχουμε ότι:

$$a = -\mu + \gamma,$$

$$b = \mu + \gamma.$$

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Ολοκλήρωση για μη-ισαπέχοντα σημεία

- Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι $\mu = (b-a)/2$ και $\gamma = (b+a)/2$.
- Οπότε τελικά έχουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό:

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}.$$

- Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό αυτό και λαμβανομένου υπόψη ότι ισχύει:

$$dt = \frac{b-a}{2}dx$$

το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο εξής ισοδύναμό του:

$$\int_a^b g(t)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f(x). \quad (1)$$

όπου θέσαμε:

$$f(x) \equiv g\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right). \quad (2)$$

Ολοκλήρωση για μη-ισαπέχοντα σημεία

- Έτσι, ο υπολογισμός κάθε ορισμένου ολοκληρώματος της γενικής μορφής:

$$\int_a^b g(t)dt$$

μπορεί να αναχθεί με βάση τις σχέσεις (1) και (2) στον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

- Για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος θεωρούμε τον ακόλουθο απλό τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i), \ (3)$$

του οποίου το δεύτερο μέλος είναι ένας γραμμικός συνδυασμός $(n+1)$ τιμών της συνάρτησης $f(x)$.

Ολοκλήρωση για μη-ισαπέχοντα σημεία

- Σε αυτή την περίπτωση οι συντελεστές w_i καθώς και τα σημεία x_i για όλα τα $i = 0(1)n$ θεωρούνται σταθερές και ισχύει ο περιορισμός:

$$-1 \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq 1. \quad (4)$$

- Έτσι συνολικά στον τύπο (3) υπάρχουν $(2n+2)$ παράμετροι.
- Μερικές από τις παραμέτρους αυτές μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι δεδομένες και επομένως γνωστές.
- Οι άγνωστες παράμετροι μπορούν να προσδιοριστούν με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών.

Ολοκλήρωση για μη-ισαπέχοντα σημεία

- Με βάση τα παραπάνω διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:
  a. τα σημεία x_i για όλα τα $i = 0(1)n$ είναι δεδομένα, τέτοια ώστε να ικανοποιούν τον περιορισμό (4), ενώ οι συντελεστές w_i για όλα τα $i = 0(1)n$ είναι προς προσδιορισμό.
  b. οι συντελεστές w_i για όλα τα $i = 0(1)n$ είναι δεδομένοι, ενώ τα σημεία x_i για όλα τα $i = 0(1)n$ είναι προς προσδιορισμό,
  c. τα σημεία x_i καθώς και οι συντελεστές w_i για όλα τα $i = 0(1)n$ είναι προς προσδιορισμό.
- Ο υπολογισμός των αγνώστων παραμέτρων βασίζεται στην απαίτηση ο τύπος (3), να είναι ακριβής για τα βασικά πολυώνυμα:

$$1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots,$$

για μια κατάλληλη τιμή του k.

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Ολοκλήρωση για μη-ισαπέχοντα σημεία

- **Ορισμός 8.2** Ένας τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης της έκφρασης

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

  ονομάζεται **τύπος μέγιστης δυνατής ακρίβειας τάξης** k αν ο τύπος αυτός δίνει ακριβή αποτελέσματα για όλες τις συναρτήσεις που είναι πολυώνυμα βαθμού μικρότερου ή ίσου με k. Ενώ κάθε άλλος τύπος δίνει ακριβή αποτελέσματα για όλες τις συναρτήσεις που είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ m με $m \leq k$.

- Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις ξεχωριστά.

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Newton-Cotes

- Στην πρώτη περίπτωση (α) έχουμε να προσδιορίσουμε συνολικά $(n+1)$ παραμέτρους.
- Απαιτούμε ο τύπος (3)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

να είναι ακριβής για τις πρώτες στη σειρά εκφράσεις των βασικών πολυωνύμων

$$1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots,$$

έως ότου σχηματίσουμε $(n+1)$ γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις η λύση των οποίων θα μας δώσει τις ζητούμενες τιμές των αγνώστων παραμέτρων.

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Newton-Cotes

- Για να ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες με δεδομένα τα x_i θα πρέπει οι συντελεστές $w_i, i = 0(1)n$ να ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των $(n+1)$ γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων:

$$
\begin{aligned}
&w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1} + w_{n+2} = 2, \\
&x_0^1 w_0 + x_1^1 w_1 + x_2^1 w_2 + \ldots x_{n-1}^1 w_{n-1} + x_n^1 w_n = 0, \\
&x_0^2 w_0 + x_1^2 w_1 + x_2^2 w_2 + \ldots x_{n-1}^2 w_{n-1} + x_n^2 w_n = \frac{2}{3}, \\
&x_0^3 w_0 + x_1^3 w_1 + x_2^3 w_2 + \ldots x_{n-1}^3 w_{n-1} + x_n^3 w_n = 0, \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&x_0^n w_0 + x_1^n w_1 + x_2^n w_2 + \ldots x_{n-1}^n w_{n-1} + x_n^n w_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Newton-Cotes

- Το σύστημα αυτό έχει μία μοναδική λύση επειδή η ορίζουσα του ανάστροφου X^T του μητρώου X των συντελεστών των αγνώστων $w_i, i = 0(1)n$ είναι η γνωστή ορίζουσα του Vandermonde:

$$\det X^T \equiv \det V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix},$$

η τιμή της οποίας ισούται με:

$$\det V = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0,$$

και είναι διάφορη του μηδενός επειδή $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$.

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Newton-Cotes

- Αν αυτές οι τιμές των w_i αντικατασταθούν στον τύπο (3):

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i),$$

  τότε ο σχηματιζόμενος τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης θα είναι ακριβής για πολυώνυμα μέχρι βαθμού τουλάχιστον n και, επομένως, θα είναι τύπος μέγιστης δυνατής ακρίβειας τάξης n.

- Οι γνωστοί μας κλειστοί και ανοικτοί τύποι των Newton – Cotes αποτελούν μία υποπερίπτωση της κατηγορίας των τύπων αριθμητικής ολοκλήρωσης που εξετάσαμε προηγουμένως.

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Newton-Cotes

- Μπορεί να αποδειχτεί ότι αν τα δεδομένα σημεία $x_i,\ i=0(1)n$ επιλεχτούν έτσι ώστε να ισχύουν τα εξής:

$$x_i = \frac{2}{n} i - 1, \text{ για όλα τα } i = 0(1)n,$$

τότε οι αντίστοιχοι τύποι (3) που σχηματίζονται με αυτά τα x_i και w_i τα οποία προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος (6), συμπίπτουν με τους αντίστοιχους κλειστούς τύπους των Newton – Cotes.

- Ενώ, αν επιλεχτούν τα παρακάτω σημεία:

$$x_i = \frac{2}{n+2} i - 1, \text{ για όλα τα } i = 0(1)n,$$

τότε οι αντίστοιχοι τύποι (3), συμπίπτουν με τους αντίστοιχους ανοικτούς τύπους των Newton – Cotes.

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Chebyshev

- Στην περίπτωση (β) έχουμε να προσδιορίσουμε συνολικά $\left(n+1\right)$ παραμέτρους.
- Απαιτούμε ο τύπος (3)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i),$$

να είναι ακριβής για τις πρώτες στη σειρά εκφράσεις των βασικών πολυωνύμων

$$1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots,$$

έως ότου σχηματίσουμε ένα σύστημα $\left(n+1\right)$ ανεξάρτητων εξισώσεων, η λύση του οποίου θα μας δώσει τις ζητούμενες τιμές των αγνώστων παραμέτρων x_i.

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Chebyshev

- Για να είναι ο τύπος (3) ακριβής για το πολυώνυμο $P_0(x) \equiv 1$ θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1} + w_{n+2} = 2. \ (7)$$

- Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω σχέση δεν υπάρχουν παράμετροι x_i που πρέπει να προσδιοριστούν.

- Όμως τα w_i είναι δεδομένα χωρίς, ωστόσο, αυτό να σημαίνει ότι μπορεί να είναι όλα τα w_i αυθαίρετα επιλεγμένα.

- Μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα $(n-1)$ συντελεστές w_i ενώ αυτός που απομένει μπορεί να υπολογιστεί από τη Σχέση (7).

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Chebyshev

- Επομένως, με δεδομένα τα w_i πρέπει οι άγνωστοι συντελεστές x_i, $i = 0(1)n$ να ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των $(n+1)$ εξισώσεων:

$$
\begin{aligned}
&w_0 x_0^1 + w_1 x_1^1 + w_2 x_2^1 + \cdots w_{n-1} x_{n-1}^1 + w_n x_n^1 = 0,\\
&w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + \cdots w_{n-1} x_{n-1}^2 + w_n x_n^2 = \frac{2}{3},\\
&w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 + \cdots w_{n-1} x_{n-1}^3 + w_n x_n^3 = 0,\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&w_0 x_0^n + w_1 x_1^n + w_2 x_2^n + \cdots w_{n-1} x_{n-1}^n + w_n x_n^n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1},\\
&w_0 x_0^{n+1} + w_1 x_1^{n+1} + w_2 x_2^{n+1} + \cdots w_{n-1} x_{n-1}^{n+1} + w_n x_n^{n+1} = \frac{1-(-1)^{n+2}}{n+2}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Chebyshev

- Το σύστημα (8) σχηματίζεται με την απαίτηση ο τύπος (3) να είναι ακριβής για τα βασικά πολυώνυμα $P_k(x) = x^k$ για όλα τα $k = 1(1)(n+1)$.
- Οι συντελεστές $x_i, i = 0(1)n$ οι οποίοι μπορούν να υπολογιστούν με την επίλυση του παραπάνω συστήματος, οφείλουν να ικανοποιούν και τον περιορισμό (4):

$$-1 \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le 1.$$

- Επομένως, το σύστημα (8) στη γενική του μορφή είναι δύσκολο να επιλυθεί με κλασικές μεθόδους.
- Μία ειδική περίπτωση που είναι γνωστή ως **αριθμητική ολοκλήρωση κατά Chebyshev**, προκύπτει αν υποθέσουμε ότι όλοι οι συντελεστές w_i είναι ίσοι μεταξύ τους.
- Στην περίπτωση αυτή το σύστημα (8) μπορεί να επιλυθεί.

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Chebyshev

- Σύμφωνα με τον περιορισμό (7):

$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1} + w_{n+2} = 2$$

αφού όλοι οι συντελεστές w_i πρέπει να τον ικανοποιούν προκύπτει ότι:

$$w_0 = w_1 = w_2 = \cdots = w_{n-1} = w_n = \frac{2}{n+1}. \; (9)$$

- Αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω τιμές στο σύστημα (8) θα έχουμε το επόμενο σύστημα εξισώσεων:

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Chebyshev

$$
\begin{aligned}
&x_0^1 + x_1^1 + x_2^1 + \cdots x_{n-1}^1 + x_n^1 = 0,\\
&x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_{n-1}^2 + x_n^2 = \frac{n+1}{3},\\
&x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + \cdots x_{n-1}^3 + x_n^3 = 0,\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&x_0^n + x_1^n + x_2^n + \cdots x_{n-1}^n + x_n^n = \frac{\left[1-(-1)^{n+1}\right](n+1)}{2(n+1)},\\
&x_0^{n+1} + x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \cdots x_{n-1}^{n+1} + x_n^{n+1} = \frac{\left[1-(-1)^{n+2}\right](n+1)}{2(n+2)}.
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Chebyshev

- Οι ζητούμενες λύσεις του συστήματος (10) αποτελούν τις ρίζες του παρακάτω πολυωνύμου:

$$P_{n+1}(x) = x^{n+1} - c_1 x^n + c_2 x^{n-1} - c_3 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n c_n x + (-1)^{n+1} c_{n+1}, \tag{11}$$

όπου

$$c_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left[s_k - c_1 s_{k-1} + c_2 s_{k-2} - c_3 s_{k-3} + \cdots + (-1)^{k-1} c_{k-1} s_1 \right], k = 1(1)(n+1) \tag{12}$$

με

$$c_0 = 1, \text{ και } s_k = x_0^k + x_1^k + \cdots + x_{k-2}^k + x_{k-1}^k.$$

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Chebyshev

Παρατήρηση:

- Για $n \leq 7$ και $n = 9$ οι ρίζες του πολυωνύμου (1) είναι όλες πραγματικές, απλές και βρίσκονται στο διάστημα $[-1, 1]$.
- Για $n = 8$ και $n \geq 10$ το πολυώνυμο (11) έχει και μιγαδικές ρίζες και έτσι για τις περιπτώσεις αυτές οι τύποι της αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Chebyshev δεν εφαρμόζονται.

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss

- Στην περίπτωση (γ) έχουμε να προσδιορίσουμε συνολικά $(2n+2)$ παραμέτρους.
- Απαιτούμε ο τύπος (3)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i),$$

να είναι ακριβής για τις πρώτες στη σειρά $(2n+2)$ εκφράσεις των βασικών πολυωνύμων:

$$1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots,$$

έως ότου σχηματίσουμε ένα σύστημα $(2n+2)$ εξισώσεων με $(2n+2)$ αγνώστους, η λύση του οποίου θα μας δώσει τις ζητούμενες τιμές των αγνώστων παραμέτρων x_i και w_i.

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss

- Επομένως, πρέπει οι άγνωστοι συντελεστές w_i και x_i, να ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα $(2n+2)$ εξισώσεων:

$$
\begin{aligned}
&w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1} + w_{n+2} = 2,\\
&w_0 x_0^1 + w_1 x_1^1 + w_2 x_2^1 + \cdots w_{n-1} x_{n-1}^1 + w_n x_n^1 = 0,\\
&w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + \cdots w_{n-1} x_{n-1}^2 + w_n x_n^2 = \frac{2}{3},\\
&w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 + \cdots w_{n-1} x_{n-1}^3 + w_n x_n^3 = 0,\\
&\qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (13)\\
&w_0 x_0^{2n} + w_1 x_1^{2n} + w_2 x_2^{2n} + \cdots w_{n-1} x_{n-1}^{2n} + w_n x_n^{2n} = \frac{2}{2n+1},\\
&w_0 x_0^{2n+1} + w_1 x_1^{2n+1} + w_2 x_2^{2n+1} + \cdots w_{n-1} x_{n-1}^{2n+1} + w_n x_n^{2n+1} = 0.
\end{aligned}
$$

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss

- Το σύστημα (13) σχηματίζεται με την απαίτηση ο τύπος (3) να είναι ακριβής για τα βασικά πολυώνυμα $P_k(x) = x^k$ για όλα τα $k = 0(1)(2n+1)$.

- **Ορισμός 8.3** Οι λύσεις του παραπάνω συστήματος μας δίνουν μία νέα οικογένεια τύπων που ονομάζονται **τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Gauss**.

- **Παρατήρηση:** Προφανώς οι τύποι αυτοί είναι ακριβείς για πολυώνυμα μέχρι και βαθμού $(2n+1)$ και, επομένως, είναι τύποι μέγιστης δυνατής ακρίβειας τάξης $(2n+1)$.

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Legendre

- Τα σημεία $x_i,\, i=0(1)n$ του συστήματος (13) έχουν ένα σημαντικό χαρακτηριστικό, γιατί αποτελούν ρίζες του πολυωνύμου Legendre $P_{n+1}(x)$ βαθμού $(n+1)$.
- Τα πολυώνυμα Legendre δίνονται ως εξής:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n. \quad (14)$$

- Τα πολυώνυμα Legendre έχουν τις παρακάτω χρήσιμες ιδιότητες:

1. Το $P_n(x)$ έχει n απλές πραγματικές ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$,
2. $(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$,
3. $\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=0$, για $m\neq n$,

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss

- Τα πολυώνυμα Legendre έχουν τις παρακάτω χρήσιμες ιδιότητες:

4. $\int_{-1}^{1}\left[P_n(x)\right]^2 dx = \dfrac{2}{2n+1},$

5. $\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)dx = \dfrac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!},$

6. $\int_{-1}^{1} x^k P_n(x)\,dx = 0,$ για $k = 0(1)(n-1),$

7. $(t-x)\sum_{i=0}^{n}(2i+1)P_i(x)P_i(t) = (n+1)\left[P_{n+1}(t)P_n(x) - P_n(t)P_{n+1}(x)\right],$

8. $\left(1-x^2\right)P_n'(x) + nxP_n(x) = nP_{n-1}(x),$

9. $\int_{-1}^{1}\dfrac{P_n(x)}{x-x_k}dx = -\dfrac{2}{(n+1)P_{n+1}(x_k)}.$

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss

- **Παρατήρηση:** Η ιδιότητα (1) είναι πολύ σημαντική επειδή οι ρίζες του πολυωνύμου $P_{n+1}(x)$ εκφράζουν τα σημεία $x_i,\ i=0(1)n$ του συστήματος (13) και επειδή βρίσκονται στο διάστημα $(-1,1)$ ικανοποιούν τον περιορισμό (4):

$$-1 \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le 1.$$

- **Παρατήρηση:** Οι ιδιότητες (3) και (4) είναι πολύ σημαντικές διότι στους χώρους με εσωτερικό γινόμενο δηλώνουν ότι τα $P_i,\ i=0(1)m$ είναι **ορθογώνια πολυώνυμα** αναφορικά με το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

και ότι το σύνολο $\{P_i,\ i=0(1)m\}$ αποτελεί βάση στο χώρο των πολυωνύμων βαθμού όχι μεγαλύτερου του m.

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss

- Τα βάρη $w_i, i=0(1)n$ του συστήματος (13) μπορεί να αποδειχτεί ότι υπολογίζονται από τη σχέση:

$$w_i = \int_{-1}^{1} L_i(x)\,dx, \quad (15)$$

όπου τα πολυώνυμα $L_i(x)$ είναι οι συντελεστές παρεμβολής του Lagrange:

$$L_i(x) = \frac{1}{a_i}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\left(x - x_j\right), \text{ όπου } a_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\left(x_i - x_j\right), i = 0(1)n. \quad (16)$$

- Τα βάρη w_i ικανοποιούν την παρακάτω σχέση η οποία αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο για τον υπολογισμό αυτών:

$$w_i = \frac{2\left(1 - x_i^2\right)}{(n+1)^2\left[P_n(x_i)\right]^2}, \; i = 0(1)n. \quad (17)$$

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss

- **Παρατήρηση:** Για τα σημεία x_i και $-x_i$ τα αντίστοιχα βάρη w_i είναι ίδια. Αυτό είναι σημαντικό γιατί οι ρίζες των πολυωνύμων Legendre $P_n(x)$ είναι συμμετρικές γύρω από το μηδέν.

- Το σφάλμα αποκοπής στους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης των Gauss – Legendre δίνεται ως εξής:

$$\varepsilon_n = -\frac{2}{(2n+3)!}\left[\frac{2^{n+1}\left[(n+1)!\right]^2}{(2n+2)!}\right]^2 f^{(2n+2)}(\eta), \quad \eta \in [-1, 1]. \quad (18)$$

Άλλοι τύποι ολοκλήρωσης κατά Gauss

- Οι τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης στους οποίους θα αναφερθούμε στη συνέχεια είναι της μορφής:

$$\int_a^b w(x)\, f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i),\ f_i = f(x_i),\ x_i \in [a,b],\ i = 0(1)n. \quad (19)$$

- Η συνάρτηση $w(x)$ ονομάζεται συνάρτηση βάρους. Είναι γνωστή και δεν μεταβάλλεται με τη συνάρτηση $f(x)$.
- Μπορούμε να δημιουργήσουμε και άλλους τύπους, χρησιμοποιώντας κατάλληλες οικογένειες ορθογωνίων πολυωνύμων $\{p_i(x)\}$ τα οποία είναι ορθογώνια στο διάστημα (a, b) αναφορικά με τη συνάρτηση βάρους $w(x)$, δηλαδή να ισχύει:

$$\int_a^b w(x) p_i(x)\, p_k(x)\,dx = 0, \text{ για } i \neq j.$$

Άλλοι τύποι ολοκλήρωσης κατά Gauss

Τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Gauss – Chebyshev

- Η έκφραση του τύπου αυτού είναι η ακόλουθη:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i), \text{ όπου } w_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ [a, b] = [-1, 1]. \quad (20)$$

- Τα σημεία $x_i, i = 0(1)n$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev:

$$T_{n+1} = \cos\left[(n+1)\arccos x\right].$$

- Οι ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev είναι πραγματικές, απλές, βρίσκονται στο διάστημα $(-1, 1)$ και οι αναλυτικές εκφράσεις τους είναι οι εξής:

$$x_i = \cos\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}, i = 0(1)n.$$

- Τα βάρη a_i είναι ίσα μεταξύ τους και δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$a_i = \frac{\pi}{n+1}, i = 0(1)n.$$

Άλλοι τύποι ολοκλήρωσης κατά Gauss

Τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Gauss – Chebyshev

- Για $n = 0, 1, 2$ από τον τύπο (20) προκύπτουν οι αντίστοιχοι τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης των Gauss – Chebyshev:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \pi f(0), \qquad (21)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{2}\left[f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right], \qquad (22)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{3}\left[f\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]. \qquad (23)$$

Άλλοι τύποι ολοκλήρωσης κατά Gauss

Τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Gauss – Laguerre

- Η έκφραση του τύπου αυτού είναι η ακόλουθη:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f\left(x\right)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f\left(x_i\right), w\left(x\right)=e^{-x}, \left[a,b\right]=\left[0,+\infty\right). \quad (24)$$

- Τα σημεία $x_i, i=0\left(1\right)n$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου Laguerre:

$$l_{n+1}=e^{x}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(e^{-x}x^{n+1}\right).$$

- Τα βάρη a_i δίνονται από τη σχέση:

$$a_i=\frac{\left[\left(n+1\right)!\right]^2}{x_i\left[l'_{n+1}\left(x_i\right)\right]^2}, i=0\left(1\right)n. \quad \left(25\right)$$

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Άλλοι τύποι ολοκλήρωσης κατά Gauss

Τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Gauss – Hermite

- Η έκφραση του τύπου αυτού είναι ακόλουθη:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f\left(x_i\right), \text{ όπου } w\left(\chi\right) = e^{-x^2},\ \left[a,b\right] = \left(-\infty, +\infty\right).\quad (26)$$

- Τα σημεία $x_i, i = 0(1)n$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου Hermite:

$$H_n = \left(-1\right)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

- Τα βάρη a_i δίνονται από τη σχέση:

$$a_i = \frac{2^{n+2}\left(n+1\right)!\sqrt{\pi}}{\left[\mathrm{H}'_{n+1}(x_i)\right]^2},\ i = 0(1)n.$$

Άλλοι τύποι ολοκλήρωσης κατά Gauss

- Όλοι οι τύποι του Gauss είναι ακριβείς για πολυώνυμα μέχρι και βαθμού $(2n+1)$ και επομένως είναι τύποι μέγιστης δυνατής ακρίβειας τάξης $(2n+1)$.

- Για όλου τους τύπους του Gauss το σφάλμα αποκοπής δίνεται ως εξής:

$$\varepsilon_n = -\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b w(x)(x-x_0)^2\cdots(x-x_n)^2\,dx,\ \eta\in(a,b).\ (27)$$