Αριθμητική Ανάλυση και Εφαρμογές

Διδάσκων: Δημήτριος Ι. Φωτιάδης

Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών

Ιωάννινα 2017-2018

Πεπερασμένες και Διαιρεμένες Διαφορές

Εισαγωγή

Θα εισάγουμε την έννοια των διαφορών με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα: Έστω $y = f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση:

x	0	10	20	30	40	50	60
$y = f(x)$	0	212	740	1430	2280	3172	4114

Για να εξάγουμε περισσότερες πληροφορίες από τα παραπάνω δεδομένα γράφουμε τον πίνακα σε πιο εκτεταμένη μορφή, που ονομάζεται **πίνακας πεπερασμένων διαφορών**, όπως παρακάτω:

Εισαγωγή

x	$f(x)$	1ες διαφ.	2ες διαφ.	3ες διαφ.	4ες διαφ.	5ες διαφ.	6ες διαφ.
0	0						
		212					
10	212		316				
		528		–154			
20	740		162		152		
		690		–2		–268	
30	1430		160		–116		510
		850		–118		242	
40	2280		42		126		
		892		8			
50	3172		50				
		942					
60	4114						

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Εισαγωγή

- Οι **πρώτες διαφορές** ή **διαφορές πρώτης τάξης** αποκτώνται αφαιρώντας κάθε συναρτησιακή τιμή από εκείνη την τιμή που βρίσκεται μια θέση ακριβώς αποκάτω της στον πίνακα των πεπερασμένων διαφορών.

- Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποκτήσουμε δεύτερης και υψηλότερης τάξης διαφορές.

- Γενικά, ένας πίνακας διαφορών που δημιουργείται με βάση $(k+1)$ τιμές εξαντλείται στη στήλη των διαφορών k τάξης.

- **Ορισμός 4.1** Τα σύμβολα Δ, ∇, και δ εκφράζουν **τελεστές διαφορών** και παριστάνουν τις **προς τα εμπρός**, τις **προς τα πίσω** και **κεντρικές διαφορές πρώτης τάξης** αντίστοιχα.

Προς τα εμπρός διαφορές

Ορισμός 4.2 Έστω $y = f(x)$ μια πραγματική συνάρτηση και έστω $y_i = f(x_i), i = 0(1)\nu$ οι $(\nu+1)$ τιμές της συνάρτησης στα προκαθορισμένα σημεία $x_i, i = 0(1)\nu$. Τη διαφορά:

$$y_{i+1} - y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, \nu-1,$$

θα την ονομάζουμε **προς τα εμπρός διαφορά πρώτης τάξης** της συνάρτησης f στη θέση x_i και θα τη συμβολίζουμε με:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i.$$

Το σύμβολο Δ θα το καλούμε **τελεστή της προς τα εμπρός διαφοράς**. Τις προς τα **εμπρός διαφορές ανώτερης τάξης** θα τις ορίζουμε επαγωγικά για $k = 2, 3, \ldots$ ως εξής:

$$\Delta^k y_i = \Delta\left(\Delta^{k-1} y_i\right) = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i.$$

Προς τα εμπρός διαφορές

Παράδειγμα Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η δεύτερη προς τα εμπρός διαφορά μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_i &= \Delta\left(\Delta y_i\right) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \\ &= \left(y_{i+2} - y_{i+1}\right) - \left(y_{i+1} - y_i\right) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.\end{aligned}$$

Ορισμός 4.3 Γενικότερα η k -στη προς τα εμπρός διαφορά μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$\Delta^k y_i = \sum_{\mu=0}^{k} (-1)^{k-\mu} \binom{k}{\mu} y_{i+\mu},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γνωστό τύπο των διωνυμικών συντελεστών

$$\binom{k}{\mu} = \frac{k!}{\mu!\left(k-\mu\right)!}.$$

Προς τα εμπρός διαφορές

Όταν χρησιμοποιείται ο συμβολισμός των προς τα εμπρός διαφορών, τότε ο πίνακας διαφορών έχει την εξής μορφή:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{i-2} & y_{i-2} & & & & \\
 & & \Delta y_{i-2} & & & \\
x_{i-1} & y_{i-1} & & \Delta^2 y_{i-2} & & \\
 & & \Delta y_{i-1} & & \Delta^3 y_{i-2} & \\
x_i & y_i & & \Delta^2 y_{i-1} & & \Delta^4 y_{i-2} \\
 & & \Delta y_i & & \Delta^3 y_{i-1} & \\
x_{i+1} & y_{i+1} & & \Delta^2 y_i & & \\
 & & \Delta y_{i+1} & & & \\
x_{i+2} & y_{i+2} & & & &
\end{array}
$$

Προς τα εμπρός διαφορές

Παρατήρηση

Το άθροισμα των όρων της τρίτης στήλης του πίνακα διαφορών ισούται με τη διαφορά των δύο ακραίων όρων της δεύτερης στήλης. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\sum_{m=i+1}^{i-2} \Delta y_m = y_{i+2} - y_{i-2}.$$

Αυτό εύκολα αποδεικνύεται στη γενική περίπτωση ως εξής:

$$\begin{aligned}\sum_{m=i+k}^{i-k-1} \Delta y_m &= \Delta y_{i+k} + \Delta y_{i+k-1} + \cdots + \Delta y_{i-k-1} \\ &= \left(y_{i+k+1} - y_{i+k}\right) + \left(y_{i+k} - y_{i+k-1}\right) + \cdots + \left(y_{i-k} - y_{i-k-1}\right) \\ &= y_{i+k+1} - y_{i-k-1}.\end{aligned}$$

Προς τα εμπρός διαφορές

- Οι εκφράσεις των $\Delta^k y_i$ σε όρους των $y_{i+m}, m = 0(1)k$ μπορούν να δοθούν με χρήση του **τριγώνου του Pascal**.

- **Ορισμός 4.4** Το **τρίγωνο του Pascal** είναι μία τριγωνική διάταξη αριθμών, οι οποίοι αποτελούν τους συντελεστές της έκφρασης $(x+y)^k$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, δηλαδή συμπίπτουν με τους συντελεστές του αναπτύγματος του διώνυμου του Newton. Το τρίγωνο επεκτείνεται προς τα κάτω και οι συντελεστές της έκφρασης $(x+y)^k$ βρίσκονται στο k επίπεδο (γραμμή), αρχίζοντας από το μηδέν. Το τρίγωνο του Pascal έχει την εξής μορφή:

Προς τα εμπρός διαφορές

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
k=0 & : & & & & & 1 & & & & \\
k=1 & : & & & & 1 & & 1 & & & \\
k=2 & : & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
k=3 & : & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
k=4 & : & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

όπου η αριστερή και η δεξιά πλευρά αποτελούνται από μονάδες και κάθε αριθμός στο k-στο επίπεδο στο εσωτερικό του τριγώνου είναι το άθροισμα των δύο αριθμών που βρίσκονται στο προηγούμενο $(k-1)$-στο επίπεδο και είναι αριστερά και δεξιά του αριθμού αυτού. Η διάταξη είναι συμμετρική αναφορικά με την κατακόρυφη γραμμή που περνά από την «κορυφή».

Προς τα εμπρός διαφορές

Εφαρμογή 4.1 Με χρήση του τριγώνου του Pascal θα δώσουμε τις εκφράσεις των $\Delta^k y_i$ σε όρους των y_{i+m}, $m = 0(1)k$.

Λύση: Στο τρίγωνο του Pascal αλλάζουμε εναλλάξ τα πρόσημα των αριθμών που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο k, αρχίζοντας πάντα από τα αριστερά με το $+1$ και παίρνουμε:

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
k=0 & : & & & & & 1 & & & & \\
k=1 & : & & & & 1 & & -1 & & & \\
k=2 & : & & & 1 & & -2 & & 1 & & \\
k=3 & : & & 1 & & -3 & & 3 & & -1 & \\
k=4 & : & 1 & & -4 & & 6 & & -4 & & 1
\end{array}
$$

Προς τα εμπρός διαφορές

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε κάθε αριθμό του τριγώνου του Pascal με τους όρους $y_{i+m}, m=0, 1, 2, \cdots, k$ ως εξής: για κάθε επίπεδο k πολλαπλασιάζουμε τον πρώτο αριθμό αρχίζοντας από τα δεξιά με y_i και τον αμέσως αριστερό του με y_{i+1} και αυξάνοντας πάντα το συντελεστή κατά ένα πολλαπλασιάζουμε τον αμέσως αριστερό του με y_{i+2} κ.λ.π. Έτσι παίρνουμε:

$$\begin{array}{lcccccccccc}
\Delta^0 y_i & = & & & & & y_i & & & & \\
\Delta^1 y_i & = & & & & y_{i+1} & & -y_i & & & \\
\Delta^2 y_i & = & & & y_{i+2} & & -2y_{i+1} & & y_i & & \\
\Delta^3 y_i & = & & y_{i+3} & & -3y_{i+2} & & 3y_{i+1} & & -y_i & \\
\Delta^4 y_i & = & y_{i+4} & & -4y_{i+3} & & 6y_{i+2} & & -4y_{i+1} & & y_i
\end{array}$$

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Προς τα πίσω διαφορές

Ορισμός 4.5 Έστω $y = f(x)$ μια πραγματική συνάρτηση και έστω $y_i = f(x_i), i = 0(1)\nu$ οι $(\nu+1)$ τιμές της συνάρτησης στα προκαθορισμένα σημεία $x_i, i = 0(1)\nu$. Τη διαφορά

$$y_i - y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, \nu,$$

θα την ονομάζουμε **προς τα πίσω διαφορά πρώτης τάξης** της συνάρτησης f στη θέση x_i και θα τη συμβολίζουμε με:

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}.$$

Το σύμβολο ∇, **ανάδελτα**, θα το καλούμε **τελεστή προς τα πίσω διαφοράς**. Τις προς τα πίσω διαφορές ανώτερης τάξης θα τις ορίζουμε επαγωγικά για $k = 2, 3, \ldots$ ως εξής:

$$\nabla^k y_i = \nabla\left(\nabla^{k-1} y_i\right) = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1}.$$

Προς τα πίσω διαφορές

Παράδειγμα: Από την παραπάνω σχέση η δεύτερη προς τα πίσω διαφορά μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 y_i &= \nabla\left(\nabla y_i\right) = \nabla y_i - \nabla y_{i-1} \\
&= \left(y_i - y_{i-1}\right) - \left(y_{i-1} - y_{i-2}\right) \\
&= y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}.
\end{aligned}
$$

Προς τα πίσω διαφορές

Όταν χρησιμοποιείται ο συμβολισμός των προς τα πίσω διαφορών, τότε ο πίνακας διαφορών έχει την εξής μορφή:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{i-2} & y_{i-2} & & & & \\
 & & \nabla y_{i-1} & & & \\
x_{i-1} & y_{i-1} & & \nabla^2 y_i & & \\
 & & \nabla y_i & & \nabla^3 y_{i+1} & \\
x_i & y_i & & \nabla^2 y_{i+1} & & \nabla^4 y_{i+2} \\
 & & \nabla y_{i+1} & & \nabla^3 y_{i+2} & \\
x_{i+1} & y_{i+1} & & \nabla^2 y_{i+2} & & \\
 & & \nabla y_{i+2} & & & \\
x_{i+2} & y_{i+2} & & & &
\end{array}
$$

Κεντρικές διαφορές

Ορισμός 4.6 Έστω $y = f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση και έστω $y_i = f(x_i), i = 0(1)\nu$ οι $(\nu+1)$ τιμές της συνάρτησης στα προκαθορισμένα σημεία $x_i, i = 0(1)\nu.$ Η **κεντρική διαφορά πρώτης τάξης** ορίζεται από τη σχέση:

$$\delta y_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+1} - y_i.$$

Το σύμβολο δ θα το καλούμε **τελεστή κεντρικής διαφοράς**. Οι **δεύτερες κεντρικές διαφορές** ή **κεντρικές διαφορές δεύτερης τάξης** ορίζονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}\delta^2 y_i = \delta(\delta y_i) &= \delta y_{i+\frac{1}{2}} - \delta y_{i-\frac{1}{2}} \\ &= (y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1}) \\ &= y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}.\end{aligned}$$

Κεντρικές διαφορές

συνέχεια ορισμού 4.6 Τις **κεντρικές διαφορές περιττής τάξης** θα τις ορίζουμε επαγωγικά από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}\delta^{2k-1} y_{i+\frac{1}{2}} &= \delta\left(\delta^{2k-2} y_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ &= \delta^{2k-2} y_{i+1} - \delta^{2k-2} y_i .\end{aligned}$$

Ενώ τις **κεντρικές διαφορές άρτιας τάξης** θα τις ορίζουμε επαγωγικά από τις σχέσεις που ακολουθούν:

$$\begin{aligned}\delta^{2k} y_i &= \delta\left(\delta^{2k-1} y_i\right) \\ &= \delta^{2k-1} y_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{2k-1} y_{i-\frac{1}{2}} .\end{aligned}$$

Κεντρικές διαφορές

Όταν χρησιμοποιείται ο συμβολισμός των κεντρικών διαφορών, τότε ο πίνακας διαφορών έχει την εξής μορφή:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{i-2} & y_{i-2} & & & & \\
 & & \delta f_{i-\frac{3}{2}} & & & \\
x_{i-1} & y_{i-1} & & \delta^2 f_{i-1} & & \\
 & & \delta f_{i-\frac{1}{2}} & & \delta^3 f_{i-\frac{1}{2}} & \\
x_i & y_i & & \delta^2 f_i & & \delta^4 f_i \\
 & & \delta f_{i+\frac{1}{2}} & & \delta^3 f_{i+\frac{1}{2}} & \\
x_{i+1} & y_{i+1} & & \delta^2 f_{i+1} & & \\
 & & \delta f_{i+\frac{3}{2}} & & & \\
x_{i+2} & y_{i+2} & & & &
\end{array}
$$

Διαιρεμένες διαφορές

Ορισμός 4.7 Έστω $y_i = f(x_i), i=0(1)\nu$ είναι οι $(\nu+1)$ δεδομένες τιμές μίας πραγματικής (ή και μιγαδικής) συνάρτησης $y=f(x)$ υπολογισμένες στα $(\nu+1)$ διακεκριμένα και όχι κατά ανάγκη ισαπέχοντα σημεία $x_i, i=0(1)\nu$ τότε οι **διαιρεμένες διαφορές** ορίζονται ως ακολούθως: Η **διαιρεμένη διαφορά μηδενικής τάξης** στο σημείο x_i συμβολίζεται με $y[x_i]$ και ορίζεται για όλα τα $i=0(1)\nu,$ ως εξής:

$$y[x_i]=y_i,$$

Η **διαιρεμένη διαφορά πρώτης τάξης** των σημείων x_i, x_j συμβολίζεται με $y[x_i, x_j]$ και ορίζεται ως εξής:

$$y[x_i, x_j]=\frac{y[x_j]-y[x_i]}{x_j-x_i}=\frac{y_j-y_i}{x_j-x_i}.$$

Διαιρεμένες διαφορές

συνέχεια ορισμού 4.7 Η **διαιρεμένη διαφορά δεύτερης τάξης** των σημείων x_i, x_j, x_k συμβολίζεται με $y\left[x_i, x_j, x_k\right]$ και ορίζεται ως:

$$y\left[x_i, x_j, x_k\right] = \frac{y\left[x_j, x_k\right] - y\left[x_i, x_j\right]}{x_k - x_i},$$

και γενικά χρησιμοποιώντας τις προηγούμενης τάξης διαφορές, η **διαιρεμένη διαφορά** m **τάξης** για $\left(1 \leq m \leq \nu\right)$, συμβολίζεται με $y\left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+m}\right]$ και ορίζεται ως εξής:

$$y\left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+m}\right] = \frac{y\left[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+m}\right] - y\left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+m-1}\right]}{x_{i+m} - x_i}.$$

Οι διαιρεμένες διαφορές πολλές φορές ονομάζονται και **πηλίκα διαφορών** ή **κλίσεις**.

Διαιρεμένες διαφορές

Όπως και στην περίπτωση των πεπερασμένων διαφορών, μπορούμε να κατασκευάσουμε για τα δεδομένα $x_i, y_i, i = 0(1)\nu$ τον αντίστοιχο πίνακα των διαιρεμένων διαφορών (π.χ. $\nu = 4$)

x_i	y_i	1ης τάξης διαφ.	2ης τάξης διαφ.	3ης τάξης διαφ.	4ης τάξης διαφ.
x_0	y_0				
		$y[x_0, x_1]$			
x_1	y_1		$y[x_0, x_1, x_2]$		
		$y[x_1, x_2]$		$y[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	y_2		$y[x_1, x_2, x_3]$		$y[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$y[x_2, x_3]$		$y[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	y_3		$y[x_2, x_3, x_4]$		
		$y[x_3, x_4]$			
x_4	y_4				

Διαιρεμένες διαφορές

Άσκηση Υπολογίστε τις διαιρεμένες διαφορές μέχρι και τρίτης τάξης για τις δοθείσες τιμές $y_i = 3, 5, 7, 11$ για $i = 0(1)3$ που υπολογίστηκαν στα σημεία $x_i = 1, 3, 4, 5$ για $i = 0(1)3$.

Λύση: Από τους τύπους των διαιρεμένων διαφορών μπορούμε να πάρουμε ότι:

$$y[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

και ότι:

$$y[x_0, x_1, x_2] = \frac{y[x_1, x_2] - y[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Διαιρεμένες διαφορές

συνέχεια λύσης Επαγωγικά μπορεί να δειχθεί ότι ισχύει ο ακόλουθος γενικός τύπος:

$$
\begin{aligned}
y[x_0, x_1, \ldots, x_m] &= \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_m)} + \\
&+ \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_m)} + \cdots + \\
&+ \frac{y_m}{(x_m - x_0)(x_m - x_1)\cdots(x_m - x_{m-1})},
\end{aligned}
$$

ο οποίος σε συντομότερη έκφραση μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$
y[x_0, x_1, \ldots, x_m] = \sum_{i=0}^{m} \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} (x_i - x_j)}.
$$

Διαιρεμένες διαφορές

Παρατήρηση Από τον παραπάνω τύπο προκύπτει ότι η $y[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ είναι μία συμμετρική συνάρτηση των σημείων $x_0, x_1, \ldots, x_m$, δεν εξαρτάται από τη σειρά των σημείων αυτών και συνεπώς δεν μεταβάλλεται με οποιαδήποτε μετάθεση αυτών.

Δηλαδή, για k και l τέτοια ώστε $0 \le k < l \le m$, ισχύει ότι:

$$y[x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_l, \ldots, x_m] = y[x_0, x_1, \ldots, x_l, \ldots, x_k, \ldots, x_m].$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$(c_1 f + c_2 g)[x_0, x_1, \ldots, x_m] = c_1 f[x_0, x_1, \ldots, x_m] + c_2 g[x_0, x_1, \ldots, x_m],$$

όπου c_1, c_2 είναι σταθερές και f, g συναρτήσεις.

Διαιρεμένες διαφορές

Σημείωση Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι επαρκώς παραγωγίσιμη, τότε η διαιρεμένη διαφορά $y[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ μπορεί να οριστεί και στην περίπτωση όπου κάποια από τα σημεία $x_i,\, i=0(1)m$ συμπίπτουν.

Έτσι για παράδειγμα αν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 μπορεί να οριστεί ότι:

$$f'(x_0) = y[x_0, x_0].$$

Σχέσεις μεταξύ των διαφορών

- Οι πίνακες διαφορών που χρησιμοποιούν τις τρεις προαναφερόμενες διαφορές συμπίπτουν απόλυτα, δηλαδή περιέχουν τις ίδιες τιμές στις ίδιες θέσεις.
- Αυτό συμβαίνει διότι αν συσχετίσουμε τις διαφορές μεταξύ τους παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$\Delta y_i = \nabla y_{i+1} = \delta y_{i+\frac{1}{2}},$$

- Και γενικά ότι ισχύει:

$$\Delta^k y_i = \nabla^k y_{i+k} = \delta^k y_{i+\frac{k}{2}}.$$

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Σχέσεις μεταξύ των διαφορών

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η ταύτιση αυτή.

$$
\begin{array}{llll}
x_{i-2} & f_{i-2} & & \\
 & & \Delta f_{i-2} = \nabla f_{i-1} = \delta f_{i-\frac{3}{2}} & \\
x_{i-1} & f_{i-1} & & \Delta^2 f_{i-2} = \nabla^2 f_i = \delta^2 f_{i-1} \\
 & & \Delta f_{i-1} = \nabla f_i = \delta f_{i-\frac{1}{2}} & \\
x_i & f_i & & \Delta^2 f_{i-1} = \nabla^2 f_{i+1} = \delta^2 f_i \\
 & & \Delta f_i = \nabla f_{i+1} = \delta f_{i+\frac{1}{2}} & \\
x_{i+1} & f_{i+1} & & \Delta^2 f_i = \nabla^2 f_{i+2} = \delta^2 f_{i+1} \\
 & & \Delta f_{i+1} = \nabla f_{i+2} = \delta f_{i+\frac{3}{2}} & \\
x_{i+2} & f_{i+2} & &
\end{array}
$$

Σχέσεις μεταξύ των διαφορών

Θεώρημα 4.1 Έστω $x_l = x_0 + lh, l = 0(1)\nu$ είναι $(\nu+1)$ ισαπέχοντα σημεία που απέχουν μεταξύ τους κατά h τότε για $0 \le i < k \le \nu+1$ ισχύει ότι:

$$y[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k y_i}{h^k k!}.$$

Σχέσεις μεταξύ των διαφορών

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Για το σκοπό αυτό ελέγχουμε αν ισχύει η σχέση αυτή για $k=1$ οπότε έχουμε ότι:

$$y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} = \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{\Delta^1 y_i}{h^1 1!},$$

και επομένως η σχέση αυτή ισχύει για $k=1$.

Δεχόμαστε ότι η σχέση αυτή ισχύει για $k=m-1$ δηλαδή ότι

$$y[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m-1}] = \frac{\Delta^{m-1} y_i}{h^{m-1}(m-1)!},$$

και θα δείξουμε ότι ισχύει για $k=m$, δηλαδή ότι:

$$y[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}] = \frac{\Delta^{m} y_i}{h^{m} m!},$$

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Σχέσεις μεταξύ των διαφορών

συνέχεια απόδειξης: Το πρώτο μέλος της παραπάνω σχέσης γράφεται διαδοχικά:

$$y\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}\right] = \frac{y\left[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+m}\right] - y\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m-1}\right]}{x_{i+m} - x_i} =$$

$$\frac{y\left[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+m}\right] - y\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m-1}\right]}{mh} = \frac{1}{mh}\left[\frac{\Delta^{m-1} y_{i+1}}{h^{m-1}(m-1)!} - \frac{\Delta^{m-1} y_i}{h^{m-1}(m-1)!}\right]$$

$$\frac{1}{h^m m!}\left[\Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i\right] = \frac{1}{h^m m!}\Delta^{m-1}\left(y_{i+1} - y_i\right).$$

Από την παραπάνω σχέση τελικά μπορούμε να πάρουμε ότι:

$$y\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}\right] = \frac{\Delta^m y_i}{h^m m!},$$

το οποίο είναι το δεύτερο μέλος και έτσι το θεώρημα αποδείχτηκε. □

Πεπερασμένες διαφορές σε πολυώνυμο

- Θα δούμε πώς συμπεριφέρονται οι τιμές στον πίνακα διαφορών, όταν οι συναρτησιακές τιμές $f(x)$ προέρχονται από ένα πολυώνυμο βαθμού m.

- **Εφαρμογή** Θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά των τιμών στον πίνακα διαφορών, όταν οι συναρτησιακές τιμές $f(x)$ προέρχονται από το πολυώνυμο $f(x) = x^4 - 2x + 10$. Παίρνοντας τιμές στα σημεία $x = -0.3(0.1)0.3$.

- **Λύση:** Για τις τιμές $x = -0.3,\ -0.2,\ \ldots,\ 0.3$ βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές $f(x)$ και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα διαφορών.

Πεπερασμένες διαφορές σε πολυώνυμο

x	$f(x)$	1ες διαφ.	2ες διαφ.	3ες διαφ.	4ες διαφ.	5ες διαφ.
–0.3	10.6081					
		–2065				
–0.2	10.4016		50			
		–2015		–36		
–0.1	10.2001		14		24	
		–2001		–12		0
0.0	10.0000		2		24	
		–1999		12		0
0.1	9.8001		14		24	
		–1985		36		
0.2	9.6016		50			
		–1935				
0.3	9.4081					

Πεπερασμένες διαφορές σε πολυώνυμο

- **Σημείωση** Οι τιμές των διαφορών στον πίνακα διαφορών εκφράζονται σε ακέραιες μονάδες της τελευταίας δεκαδικής τάξης που διατηρείται.

- **Θεώρημα 4.2** Οι διαφορές k τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού k:

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \left(a_k \neq 0\right),$$

έχουν όλες σταθερή τιμή:

$$c = k! a_k h^k,$$

όπου h είναι η διαφορά μεταξύ διαδοχικών τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής x στις οποίες υπολογίζεται το πολυώνυμο.

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Πεπερασμένες διαφορές σε πολυώνυμο

Εφαρμογή Έστω ότι μας δίνεται το παρακάτω σύνολο τιμών μίας συνάρτησης $f(x)$ που αντιστοιχούν σε ισαπέχουσες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x :

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$y=f(x)$	0.26	–1.49	–1.74	–0.49	2.26	6.51	12.26

Με εφαρμογή του Θεωρήματος 4.6 θα προσδιορίσουμε το μικρότερου βαθμού πολυώνυμο που προσαρμόζεται στις δοθείσες τιμές.

Λύση: Για τις δοθείσες συναρτησιακές τιμές $f(x)$ σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα διαφορών:

Πεπερασμένες διαφορές σε πολυώνυμο

x	$f(x)$	1ες διαφορές	2ες διαφορές
0	0.26		
		–175	
0.5	–1.49		150
		–25	
1.0	–1.74		150
		125	
1.5	–0.49		150
		275	
2.0	2.26		150
		425	
2.5	6.51		150
		575	
3.0	12.26		

Πεπερασμένες διαφορές σε πολυώνυμο

- **συνέχεια λύσης** Αφού οι δεύτερες διαφορές είναι όλες ίσες μεταξύ τους, τότε το ζητούμενο πολυώνυμο είναι βαθμού δύο, δηλαδή είναι της μορφής:

$$f\left(x\right)=a_2x^2+a_1x+a_0.$$

- Επιπλέον, για αυτό το πολυώνυμο με βάση το Θεώρημα 4.2 πρέπει να ισχύει ότι:

$$2!a_2\left(0.5\right)^2=1.5,$$

  και επομένως θα είναι $a_2=3.$

- Μέχρι στιγμής έχουμε βρει ότι το ζητούμενο πολυώνυμο είναι της παρακάτω μορφής:

$$f\left(x\right)=3x^2+a_1x+a_0.$$

- Με τον ίδιο τρόπο θα βρούμε τους συντελεστές a_1 και a_0.

Πεπερασμένες διαφορές σε πολυώνυμο

συνέχεια λύσης Έτσι, αν αφαιρέσουμε από τις δοθείσες συναρτησιακές τιμές $f(x)$ τις τιμές $3x^2$, τότε προφανώς οι νέες τιμές θα προέρχονται από το πολυώνυμο $a_1 x + a_0$. Έτσι κατασκευάζουμε τον εξής πίνακα διαφορών:

x	$f(x) - 3x^2$	1ες διαφορές
0	0.26	
		–250
0.5	–2.24	
		–250
1.0	–4.74	
		–250
1.5	–7.24	
		–250
2.0	–9.74	
		–250
2.5	–12.24	
		–250
3.0	–14.74	

Πεπερασμένες διαφορές σε πολυώνυμο

- **συνέχεια λύσης** Οι συναρτησιακές τιμές προέρχονται από κάποιο πολυώνυμο πρώτου βαθμού $a_1 x + a_0$, αφού οι πρώτες διαφορές είναι όλες ίσες μεταξύ τους.
- Επιπλέον, για αυτό το πολυώνυμο με βάση το Θεώρημα 4.2 πρέπει να ισχύει ότι: $1! a_1 (0.5) = -2.5$, και επομένως θα είναι $a_1 = -5$.
- Μέχρι στιγμής έχουμε βρει ότι το ζητούμενο πολυώνυμο είναι της μορφής: $f(x) = 3x^2 - 5x + a_0$.
- Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι οι συναρτησιακές τιμές $f(x) - 3x^2 + 5x$ είναι όλες ίσες με 0.26.
- Επομένως το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το ακόλουθο:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 0.26.$$

Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

- Είναι προφανές ότι αν υπάρχει σφάλμα σε μία ή περισσότερες συναρτησιακές τιμές, τότε το σφάλμα αυτό μεταδίδεται σε περισσότερες από μια τιμές του πίνακα διαφορών.

- Θα εξετάσουμε πώς μεταδίδεται το σφάλμα που έχει γίνει σε μία συναρτησιακή τιμή στον πίνακα διαφορών.
  - Θεωρούμε τις τιμές y_i μίας συνάρτησης $f(x)$ υπολογισμένες για διάφορες τιμές x_i της ανεξάρτητης μεταβλητής x.
  - Υποθέτουμε ότι σε μία από αυτές, έστω την y_i υπάρχει ένα σφάλμα ε.
  - Ο παρακάτω πίνακας μας δείχνει πως μεταδίδεται το σφάλμα αυτό.
  - Ο πίνακας δεν περιέχει τις τιμές των διαφορών. Σε έναν πίνακα διαφορών τα σφάλματα αυτά πρέπει να προστεθούν στις αντίστοιχες τιμές.

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

x	$f(x)$	1ες διαφ.	2ες διαφ.	3ες διαφ.	4ες διαφ.
x_{i-2}	y_{i-2}				ε
				ε	
x_{i-1}	y_{i-1}		ε		-4ε
		ε		-3ε	
x_i	$y_i+\varepsilon$		-2ε		6ε
		$-\varepsilon$		3ε	
x_{i+1}	y_{i+1}		ε		-4ε
				$-\varepsilon$	
x_{i+2}	y_{i+2}				ε

Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

Παρατηρήσεις

- Οι συντελεστές του μεταδιδόμενου σφάλματος για κάθε διαφορά συμπίπτουν με τους συντελεστές του αναπτύγματος του διωνύμου του Newton.
- Όταν οι συναρτησιακές τιμές προέρχονται από ένα πολυώνυμο, τότε το μεμονωμένο σφάλμα θα αντιστοιχεί σε εκείνη την τιμή της συνάρτησης που βρίσκεται στην ίδια οριζόντια γραμμή με τη διαφορά που έχει το μεγαλύτερο απόλυτο σφάλμα.
  – Αν υπάρχουν δύο διαφορές με το μεγαλύτερο απόλυτο σφάλμα, τότε το μεμονωμένο σφάλμα θα αντιστοιχεί σε εκείνη την τιμή της συνάρτησης που βρίσκεται ανάμεσα σε αυτές τις διαφορές.

Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

Εφαρμογή Θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά των τιμών στον πίνακα διαφορών, όταν οι συναρτησιακές τιμές προέρχονται από το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - 8x^2 - 4x - 1$, παίρνοντας τιμές στα σημεία $x = 0(0.1)0.9$ και θεωρώντας ότι, όταν το $x = 0.4$, η αντίστοιχη τιμή έχει ένα σφάλμα $\varepsilon = 0.002$.

Με βάση τη συμπεριφορά των τιμών στον πίνακα διαφορών θα γίνουν εμφανή η προέλευση και η τιμή του σφάλματος.

Λύση: Για τις τιμές $x = 0,\ 0.1,\ \ldots,\ 0.9$ βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές $f(x)$ και λαμβάνουμε υπόψη το σφάλμα στην $f(0.4)$, δηλαδή αντί για $f(0.4) = -3.816$ παίρνουμε $f(0.4) = -3.814$.

Με βάση αυτά σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα διαφορών.

x	$f(x)$	1ες διαφ.	2ες διαφ.	3ες διαφ.	4ες διαφ.
0	–1				
		–479			
0.1	–1.479		–154		
		–633		6	
0.2	–2.112		–148		2
		–781		8	
0.3	–2.893		–140		–8
		–921		0	
0.4	–3.814		–140		12
		–1061		12	
0.5	–4.875		–128		–8
		–1189		4	
0.6	–6.064		–124		2
		–1313		6	
0.7	–7.377		–118		0
		–1413		6	
0.8	–8.808		–112		
		–1543			
0.9	–10.351				

Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

συνέχεια λύσης

- Εφόσον οι διαφορές τέταρτης τάξης δεν είναι όλες ίσες με το μηδέν , τότε αυτές θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιες των διωνυμικών συντελεστών $(1,\ -4,\ 6,\ -4,\ 1)$.

- Με βάση αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε το σφάλμα ως εξής:
  - Αφού έχουμε τιμή στην τέταρτης τάξης διαφορά $0.002,$ τότε θα πρέπει να ισχύει $1\times\varepsilon=0.002,$ δηλαδή το σφάλμα είναι $\varepsilon=0.002.$
  - Αφού έχουμε μία διαφορά που έχει το μεγαλύτερο απόλυτο σφάλμα $0.012,$ τότε το μεμονωμένο σφάλμα αντιστοιχεί σε εκείνη την τιμή της συνάρτησης που βρίσκεται στην ίδια οριζόντια γραμμή με τη διαφορά αυτή και επομένως αντιστοιχεί στην $f\left(0.4\right).$

Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

Σφάλματα στρογγυλοποίησης συναρτησιακών τιμών

- Υποθέτουμε ότι οι συναρτησιακές τιμές είναι υπολογισμένες σε ισαπέχοντα σημεία και έχουν στρογγυλοποιηθεί σε k δεκαδικά ψηφία.

- Δηλαδή, αν $\varepsilon_i^{(0)}$ δηλώνει το σφάλμα στρογγυλοποίησης που αντιστοιχεί στην ακριβή συναρτησιακή τιμή y_i, με αντίστοιχη προσεγγιστική τιμή y_i^* ισχύει:

$$\left|\varepsilon_i^{(0)}\right| = \left|y_i^* - y_i\right| \le \frac{1}{2}10^{-k}.$$

Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

- Στη συνέχεια, αν $\varepsilon_i^{(1)}$ παριστάνει το σφάλμα που αντιστοιχεί στην ακριβή τιμή της πρώτης διαφοράς Δy_i με αντίστοιχη προσεγγιστική τιμή Δy_i^*, ισχύει:

$$\varepsilon_i^{(1)} = \Delta y_i^* - \Delta y_i = \left[y_{i+1}^* - y_i^* \right] - \left[y_{i+1} - y_i \right]$$
$$= \left[y_{i+1}^* - y_{i+1} \right] - \left[y_i^* - y_i \right] = \varepsilon_{i+1}^{(0)} - \varepsilon_i^{(0)}.$$

- Με βάση τα παραπάνω ισχύει ότι:

$$\left|\varepsilon_1^{(1)}\right| = \left|\varepsilon_{i+1}^{(0)} - \varepsilon_i^{(0)}\right| \le \left|\varepsilon_{i+1}^{(0)}\right| + \left|\varepsilon_i^{(0)}\right|$$
$$\le 2 \times \frac{1}{2} 10^{-k} = 10^{-k}.$$

Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

- Αν $\varepsilon_i^{(m)}$ παριστάνει το σφάλμα που αντιστοιχεί στην ακριβή τιμή της m τάξης διαφοράς $\Delta^m y_i$ με αντίστοιχη προσεγγιστική τιμή $\Delta^m y_i^*$, θα ισχύει ότι:

$$\varepsilon_i^{(m)} = \Delta^m y_i^* - \Delta^m y_i = \left[\Delta^{m-1} y_{i+1}^* - \Delta^{m-1} y_i^*\right] - \left[\Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i\right]$$

$$= \left[\Delta^{m-1} y_{i+1}^* - \Delta^{m-1} y_{i+1}\right] - \left[\Delta^{m-1} y_i^* - \Delta^{m-1} y_i\right] = \varepsilon_{i+1}^{(m-1)} - \varepsilon_i^{(m-1)}.$$

- Με βάση τα παραπάνω ισχύει ότι

$$\left|\varepsilon_i^{(m)}\right| = \left|\varepsilon_{i+1}^{(m-1)} - \varepsilon_i^{(m-1)}\right|,$$

και επομένως έχουμε:

$$\left|\varepsilon_i^{(m)}\right| \le \left|\varepsilon_{i+1}^{(m-1)}\right| + \left|\varepsilon_i^{(m-1)}\right| \le 2 \times 2^{m-2} \times 10^{-k} = 2^{m-1} \times 10^{-k}.$$

Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

Εφαρμογή

Θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά των τιμών στον πίνακα διαφορών όταν οι συναρτησιακές τιμές προέρχονται από το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - 8x + 6$, παίρνοντας τιμές στα σημεία $x = 2(0.2)3$ και θεωρώντας ότι οι συναρτησιακές τιμές έχουν στρογγυλο-ποιηθεί σε δύο δεκαδικά ψηφία.

Επίσης θα βρούμε ένα άνω φράγμα για το απόλυτο σφάλμα στις διαφορές τετάρτης τάξης της συνάρτησης.

Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

Λύση:

- Τα σφάλματα στρογγυλοποίησης που υπάρχουν στις τιμές θα ικανοποιούν τη σχέση:

$$\left|\varepsilon_i^{(0)}\right| \le \frac{1}{2}10^{-2}.$$

- Συνεπώς, για τα σφάλματα στις διαφορές τέταρτης τάξης της συνάρτησης θα ισχύει:

$$\left|\varepsilon_i^{(4)}\right| \le 2^{4-1} \times 10^{-2} = 0.08.$$

- Για τις τιμές $x = 2.0,\ 2.2,\ \ldots,\ 3.0$ βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές $y = f\left(x\right)$ και στρογγυλοποιούμε τις τιμές αυτές σε δύο δεκαδικά ψηφία για να πάρουμε τις προσεγγιστικές τιμές y^*.
- Με βάση αυτά σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα διαφορών:

Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

x	$y = f(x)$	y^*	1ες διαφ.	2ες διαφ.	3ες διαφ.	4ες διαφ.
2.0	–2	–2.00				
			105			
2.2	–0.952	–0.95		52		
			157		7	
2.4	0.624	0.62		59		–5
			216		2	
2.6	2.776	2.78		61		5
			277		7	
2.8	5.552	5.55		68		
			345			
3.0	9	9.00				

Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

συνέχεια λύσης

- Οι διαφορές τέταρτης τάξης θα είναι ίσες με

$$\Delta^4 y_i^* = \Delta^4 y_i + \varepsilon_i^{(4)}.$$

- Όμως σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2 ισχύει ότι $\Delta^4 y_i = 0$ και έτσι έχουμε $\Delta^4 y_i^* = \varepsilon_i^{(4)}$.

- Επομένως, οι τέταρτες διαφορές του παραπάνω πίνακα αποτελούνται από τα σφάλματα που προέρχονται από τα σφάλματα στρογγυλοποίησης στις συναρτησιακές τιμές.

- Με βάση αυτό οι τέταρτες διαφορές του παραπάνω πίνακα θα πρέπει να φράζονται από τον αριθμό 0.08.

Γραμμικοί τελεστές διαφορών

Οι τελεστές Δ, ∇ και δ ονομάζονται **γραμμικοί τελεστές διαφορών**, επειδή ικανοποιούν τη σχέση:

$$T\left(c_1 f\left(x\right)+c_2 g\left(x\right)\right)=c_1 Tf\left(x\right)+c_2 Tg\left(x\right),$$

όπου T είναι ένας από τους τελεστές αυτούς, c_1 και c_2 είναι σταθερές και, $f\left(x\right)$ και $g\left(x\right)$ συναρτήσεις του x.

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Γραμμικοί τελεστές διαφορών

- **Ορισμός 4.8** Ορίζουμε τον **τελεστή μετατόπισης** που σημειώνεται ως E από τους παρακάτω τύπους:

  $$Ef\left(x\right)=f\left(x+h\right) \text{ ή } Ey_i=y_{i+1},$$

  και

  $$E^k f\left(x\right)=E\left(E^{k-1}f\left(x\right)\right) \text{ ή } E^k y_i=E\left(E^{k-1}y_i\right).$$

- Από τις παραπάνω σχέσεις μπορεί εύκολα να προκύψει ότι για ισαπέχοντα σημεία ισχύει η σχέση:

  $$E^k f\left(x\right)=f\left(x+kh\right),$$

  ή ότι για τυχαία σημεία ισχύει η σχέση:

  $$E^k y_i=y_{i+k}.$$

Γραμμικοί τελεστές διαφορών

- **Ορισμός 4.9** Ορίζουμε τον **ταυτοτικό τελεστή** που σημειώνεται ως I από την παρακάτω σχέση:

$$If(x) = f(x),$$

και ορίζουμε ότι:

$$\Delta^0 = \nabla^0 = E^0 = I.$$

- **Ορισμός 4.10** Ορίζουμε τον **τελεστή της μέσης τιμής** ο οποίος συμβολίζεται με μ και ορίζεται ως εξής:

$$\mu f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right],$$

έτσι ώστε για παράδειγμα με αυτόν τον τελεστή να έχουμε:

$$\mu f_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[f_1 + f_0], \text{ και } \mu\delta^2 f_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\delta^2 f_1 + \delta^2 f_0\right].$$

Γραμμικοί τελεστές διαφορών

- **Ορισμός 4.11** Ο **τελεστής της παραγώγου** συμβολίζεται με D και ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$Df(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

- **Ορισμός 4.12** Δύο τελεστές T_1 και T_2 καλούνται **ίσοι** $(T_1 = T_2)$, όταν για κάθε συνάρτηση $f(x)$ και για κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού της ισχύει:

$$T_1 f(x) = T_2 f(x).$$

Ο τελεστής T είναι το άθροισμα ή η διαφορά δύο άλλων τελεστών T_1 και T_2 όταν για κάθε συνάρτηση $f(x)$ και για κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού αυτής ισχύουν αντίστοιχα οι σχέσεις:

$$Tf(x) = T_1 f(x) + T_2 f(x), \; Tf(x) = T_1 f(x) - T_2 f(x).$$

Γραμμικοί τελεστές διαφορών

Ορισμός 4.12

Ο τελεστής T είναι το **γινόμενο** δύο άλλων τελεστών T_1 και T_2 $\left(T = T_1T_2\right)$, όταν για κάθε συνάρτηση $f\left(x\right)$ και για κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού αυτής ισχύουν αντίστοιχα οι σχέσεις:

$$Tf\left(x\right) = T_1\left(T_2 f\left(x\right)\right).$$

Ο τελεστής I είναι ο **μοναδιαίος** τελεστής, όταν για κάθε συνάρτηση $f\left(x\right)$ και για κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού της ισχύει:

$$If\left(x\right) = f\left(x\right).$$

Ο τελεστής I συμβολίζεται και με τον αριθμό 1.

Γραμμικοί τελεστές διαφορών

Ορισμός 4.12

Ο τελεστής T_1 είναι ο **δεξιός αντίστροφος** του τελεστή T όταν ισχύει η σχέση

$$TT_1 = 1.$$

Ο δεξιός αντίστροφος T_1 συμβολίζεται με T^{-1}. Αν συμβαίνει ο δεξιός αντίστροφος T^{-1} του T να είναι συγχρόνως και **αριστερός αντίστροφος** του T, δηλαδή αν ισχύει η σχέση $T^{-1}T = 1$, τότε ο T^{-1} καλείται αντίστροφος του T. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει η **αντιμεταθετική ιδιότητα** μεταξύ των T και T^{-1}, δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$T^{-1}T = TT^{-1} = 1.$$

Γραμμικοί τελεστές διαφορών

Παρατήρηση

- Οι γραμμικοί τελεστές $\Delta, \nabla, \delta, E$ και D έχουν δεξιό αντίστροφο και μόνο ο E έχει αντίστροφο.
- Επίσης, και οι πέντε γραμμικοί τελεστές υπακούουν τους νόμους της Άλγεβρας με εξαίρεση την ιδιότητα του αντιστρόφου.
- Ο λογισμός αυτός λέγεται **λογισμός των τελεστών** και οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται λέγονται **συμβολικές μέθοδοι**.

Γραμμικοί τελεστές διαφορών

Εφαρμογή Χρησιμοποιώντας λογισμό τελεστών θα δείξουμε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση τελεστών:

$$\Delta = E - I.$$

Λύση: Από τον ορισμό του τελεστή Δ έχουμε:

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x)\\ &= Ef(x) - If(x)\\ &= (E-I)f(x).\end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει ότι $\Delta = E - I$.

Γραμμικοί τελεστές διαφορών

Σχέσεις μεταξύ των τελεστών

	Δ	∇	δ	E	D
Δ		$(1-\nabla)^{-1}-1$	$\frac{1}{2}\delta^2+\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}$	$E-1$	$e^{hD}-1$
∇	$1-(1+\Delta)^{-1}$		$-\frac{1}{2}\delta^2+\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}$	$1-E^{-1}$	$1-e^{-hD}$
δ	$\Delta(1+\Delta)^{-\frac{1}{2}}$	$\nabla(1-\nabla)^{-\frac{1}{2}}$		$E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}}$	$2\sinh\left(\frac{hD}{2}\right)$
E	$\Delta+1$	$(1-\nabla)^{-1}$	$1+\frac{1}{2}\delta^2+\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}$		e^{hD}
D	$\frac{1}{h}\log(1+\Delta)$	$-\frac{1}{h}\log(1-\nabla)$	$\frac{2}{h}\sinh^{-1}\delta$	$\frac{1}{h}\log E$	

Στοιχεία εξισώσεων διαφορών

- Οι εξισώσεις διαφορών παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυση των αριθμητικών μεθόδων επίλυσης διαφορικών εξισώσεων.
- Η τυπική διαφορά μεταξύ διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών είναι ότι στις εξισώσεις διαφορών οι άγνωστοι δεν είναι συναρτήσεις, αλλά ακολουθίες σημείων.
- **Ορισμός 4.13** Εξίσωση διαφορών λέγεται μία εξίσωση που περιέχει διαφορές.
- **Παράδειγμα** Η παρακάτω εξίσωση

$$\Delta^2 y_i + \Delta y_i + y_i = 0,$$

από την οποία μπορούμε να πάρουμε ότι:

$$y_{i+2} - y_{i+1} + y_i = 0,$$

αποτελεί μία εξίσωση διαφορών.

Στοιχεία εξισώσεων διαφορών

- Γενικά, οι εξισώσεις διαφορών γράφονται συνήθως με τα y_i, όπως για παράδειγμα:

$$y_{i+1} = a_i y_i + \beta_i ,$$

  όπου a_i και β_i είναι γνωστές συναρτήσεις του i.

- **Ορισμός 4.14** Εξίσωση διαφορών είναι μια σχέση μεταξύ των τιμών y_i μίας συνάρτησης ορισμένη για διακεκριμένες τιμές του ορίσματος x_i.

- **Ορισμός 4.15** Λύση μιας εξίσωσης διαφορών είναι μια ακολουθία τιμών y_i που ικανοποιούν την εξίσωση για ένα σύνολο διαδοχικών τιμών του i.

- **Ορισμός 4.16** Τάξη μιας εξίσωσης διαφορών είναι η διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου δείκτη (τιμών του i) της εξίσωσης.

Στοιχεία εξισώσεων διαφορών

Παράδειγμα

Για τις παρακάτω εξισώσεις διαφορών:

$$y_{i+1} - y_i = 1, \quad \text{για όλα τα} \quad i,$$
$$y_{i+1} - (i+1)\, y_i = 0, \quad \text{για όλα τα} \quad i \geq 0,$$

μπορούμε να δούμε, με απευθείας αντικατάσταση, ότι οι εξισώσεις αυτές έχουν τις παρακάτω λύσεις αντίστοιχα:

$$y_i = i + c, \quad \text{για όλα τα} \quad i,$$
$$y_i = c\, i!, \quad \text{για όλα τα} \quad i \geq 0,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

Στοιχεία εξισώσεων διαφορών

Ομογενείς γραμμικές εξισώσεις διαφορών τάξης n **με σταθερούς συντελεστές**

$$y_{i+n} + a_{n-1}y_{i+n-1} + \cdots + a_0 y_i = 0. \quad (4.1)$$

- Θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής $y_i = \beta^i$, για όλα τα i.
- Αν αντικαταστήσουμε τις λύσεις αυτές στην παραπάνω εξίσωση θα πάρουμε:

$$\beta^{i+n} + a_{n-1}\beta^{i+n-1} + \cdots + a_0 \beta^i = 0. \quad (4.2)$$

- Αν διαιρέσουμε με β^i παίρνουμε τη **χαρακτηριστική εξίσωση**:

$$\rho(\beta) = \beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + a_0 = 0. \quad (4.3)$$

η οποία αποτελεί ένα πολυώνυμο βαθμού n.

Στοιχεία εξισώσεων διαφορών

- Υποθέτουμε ότι οι ρίζες $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, αυτού του πολυωνύμου είναι διακεκριμένες.
- Τότε οι $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, είναι όλες λύσεις της δεδομένης εξίσωσης διαφορών και συνεπώς λόγω γραμμικότητας έχουμε ότι και η σχέση:

$$y_i = c_1\beta_1^i + c_2\beta_2^i + \cdots + c_n\beta_n^i, \quad \text{για όλα τα } i,$$

  για αυθαίρετες σταθερές c_i είναι επίσης λύση της εξίσωσης διαφορών, η οποία σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να δειχτεί ότι είναι η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών.
- Αν δίνονται οι πρώτες n αρχικές τιμές των y_i, τότε η εξίσωση διαφορών μπορεί να δοθεί αναλυτικά (σε κλειστή μορφή) για όλες τις διαδοχικές τιμές των i.

Στοιχεία εξισώσεων διαφορών

Εφαρμογή Έστω ότι μας δίνεται η εξίσωση διαφορών:

$$2y_{i+3} - y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = 0, \quad (4.4)$$

με τις αρχικές συνθήκες $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ και $y_2 = 2.$ Θα βρούμε τη λύση της εξίσωσης αυτής σε κλειστή μορφή για όλες τις διαδοχικές τιμές των i.

Λύση: Η δοθείσα εξίσωση διαφορών είναι τρίτης τάξης και η χαρακτηριστική εξίσωση διαφορών είναι:

$$2\beta^3 - \beta^2 - 2\beta + 1 = 0.$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου αυτού είναι οι $\beta_1 = +1$, $\beta_2 = -1$ και $\beta_3 = 1/2.$

Επομένως, η γενική λύση της εξίσωση διαφορών είναι

$$y_i = c_1(1)^i + c_2(-1)^i + c_3\left(\frac{1}{2}\right)^i \text{ ή } y_i = c_1 + (-1)^i c_2 + \frac{c_3}{2^i}. \quad (4.5)$$

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.

Στοιχεία εξισώσεων διαφορών

συνέχεια λύσης Χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.5 και τις αρχικές συνθήκες για $i = 0, 1, 2,$ αποκτάμε το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων για τις σταθερές c_1, c_2, c_3 :

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

$$c_1 - c_2 + \frac{1}{2} c_3 = 1,$$

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{4} c_3 = 2,$$

η λύση του οποίου είναι $c_1 = 15/6, c_2 = 1/6, c_3 = -8/3.$

Έτσι, η έκφραση

$$y_i = \frac{15}{6} + \frac{(-1)^i}{6} - \frac{8}{3 \times 2^i}.$$

αποτελεί τη ζητούμενη λύση.

Στοιχεία εξισώσεων διαφορών

- Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών, τότε μπορούμε επίσης να εκφράσουμε τη λύση σε πραγματική μορφή.
- Έτσι, αν $\beta_1 = a + \beta_j$ και $\beta_2 = a - \beta_j$ μπορούμε να εκφράσουμε τα . . $\beta_{1,2}$ σε πολική μορφή: $\beta_1 = re^{\theta j}$, $\beta_2 = re^{-\theta j}$, όπου $r = \left(a^2 + \beta^2\right)^{1/2}$ και $\beta = \arctan\left(\beta/a\right)$.
- Τότε η λύση της 4.2 που αντιστοιχεί σε αυτό το ζεύγος ριζών είναι:

$$
\begin{aligned}
&c_1\beta_1^i + c_2\beta_2^i = c_1 r^i e^{i\theta j} + c_2 r^i e^{-i\theta j} \\
&= r^i\left(c_1\left(\cos i\theta + j\sin i\theta\right) + c_2\left(\cos i\theta - j\sin i\theta\right)\right) \\
&= r^i\left(\kappa_1 \cos i\theta + \kappa_2 \sin i\theta\right),
\end{aligned}
$$

όπου $\kappa_1 = c_1 + c_2$ και $\kappa_2 = \left(c_1 - c_2\right) j$.

Στοιχεία εξισώσεων διαφορών

- Αν β_1 είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου 4.3 τότε μια δεύτερη λύση αυτού είναι η $i\beta_1^i$.

- Για αν επαληθεύσουμε ότι η $i\beta_1^i$ είναι λύση, αντικαθιστούμε $y_i = i\beta_1^i$ στην 4.1 και βρίσκουμε ότι:

$$(i+n)\beta_1^{i+n} + a_{n-1}(i+n-1)\beta_1^{i+n-1} + \cdots + a_0 i\beta_1^i =$$

$$\beta_1^i\left\{i\left(\beta_1^n + a_{n-1}\beta_1^{n-1} + \cdots + a_0\right) + \beta_1\left[n\beta_1^{n-1} + a_{n-1}(n-1)\beta_1^{n-2} + \cdots + a_1\right]\right\} =$$

$$\beta_1^i\left\{i\rho(\beta_1) + \beta_1\rho'(\beta_1)\right\} = 0,$$

αφού $\rho(\beta_1) = \rho'(\beta_1) = 0.$

- Μπορεί να δειχτεί ότι όλες αυτές οι λύσεις δηλαδή οι β_1^i και $i\beta_1^i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Στοιχεία εξισώσεων διαφορών

Γενική λύση μη ομογενούς γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y_{i+n} + a_{n-1} y_{i+n-1} + \cdots + a_0 y_i = b_i ,$$

- Η γενική λύση μπορεί να γραφεί στη μορφή: $y_i = y_i^{\Gamma} + y_i^{\mathrm{M}}$, όπου y_i^{Γ} είναι η γενική λύση της ομογενούς και y_i^{M} είναι μια μερική λύση.
- Στην ειδική περίπτωση όπου $b_i = b$ είναι σταθερά, μια μερική λύση μπορεί να δημιουργηθεί θέτοντας $y_i^M = A$ (μια σταθερά) και αντικαθιστώντας όπου $y_i = A$ προσδιορίζοντας έτσι το

$$A = \frac{b}{1 + a_{n-1} + \cdots + a_0} ,$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι το άθροισμα των συντελεστών δεν είναι μηδέν.

Το περιεχόμενο βασίζεται στο βιβλίο: Μ.Ν. Βραχάτης, Αριθμητική Ανάλυση, Κλειδάριθμος, 2012.