

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

Α. Σακελλάριος

6^ο Εξάμηνο Μηχανικών Επιστήμης Υλικών

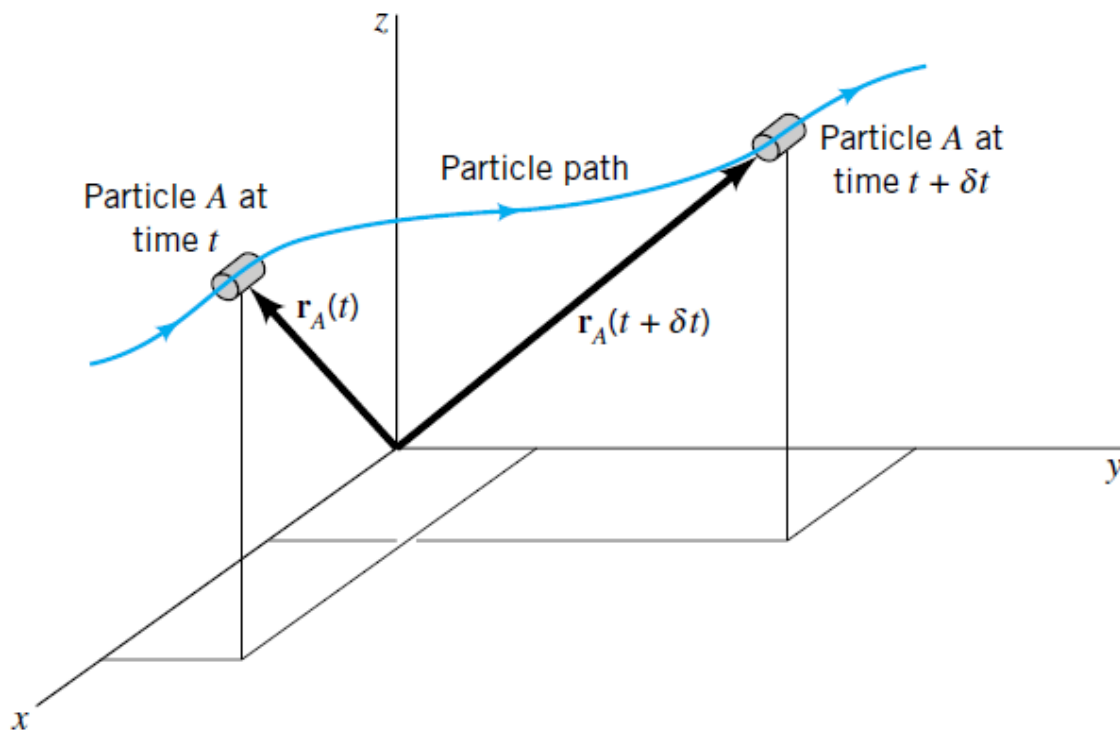
Εισαγωγή

- Η κινηματική είναι η μελέτη της κίνησης χωρίς να λαμβάνονται υπόψη τα αίτια που την προκαλούν (δυνάμεις, ροπές)
- Η μελέτη της κινηματικής συμπεριφοράς αφορά στην θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση και όχι στη δύναμη
- Η κινηματική των ρευστών ασχολείται με την περιγραφή της κίνησης τους και όχι με τα αίτια αυτής
- Η κινηματική των ρευστών περιγράφει την μετακίνηση, περιστροφή και παραμόρφωση του σωματιδίου του ρευστού και με την απεικόνιση της ροής

- **Θέματα**

- Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία, πεδίο ροής
- Περιγραφές ροής.
- Υλική παράγωγος και χωρική παράγωγος
- Απεικόνιση ροής.

Απεικόνιση πεδίου ροής



Θέση και διάνυσμα θέσης
σωματιδίου

Η απεικόνιση των
παραμέτρων της ροής
ως συνάρτηση των
χωρικών και χρονικών
συντεταγμένων
ονομάζεται
απεικόνιση πεδίου
ροής

Βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη

- **Βαθμωτό** μέγεθος είναι αυτό που χαρακτηρίζεται από το μέγεθος και τις μονάδες του

Π.χ. μάζα, πυκνότητα, θερμοκρασία

- **Βαθμωτό πεδίο**: Εάν το βαθμωτό μέγεθος ορίζεται σε κάθε σημείο μιας περιοχής η περιοχή αποτελεί ένα βαθμωτό πεδίο.

Π.χ. κατανομή θερμοκρασίας σε πτερύγιο

- **Διάνυσμα**: το μέγεθος που ορίζεται από το μέγεθος και τη διεύθυνσή του

Π.χ. δύναμη, ταχύτητα, μετατόπιση

- **Διανυσματικό πεδίο**: Εάν το διανυσματικό μέγεθος ορίζεται σε κάθε σημείο μιας περιοχής η περιοχή αποτελεί ένα διανυσματικό πεδίο.

Π.χ. κατανομή ταχύτητας σε πεδίο ροής .

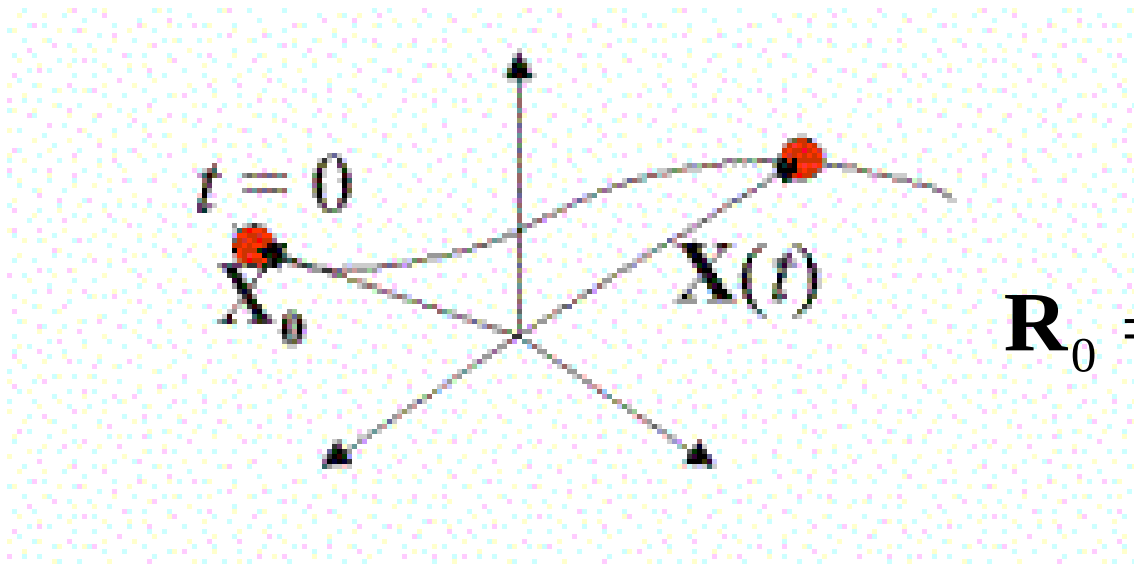
Υλικές και χωρικές συντεταγμένες

- Έστω σωματίδιο ρευστού. Πώς παρακολουθείται η κίνησή του στο χώρο?
 - Οι **υλικές συντεταγμένες** x_0, y_0, z_0 για δεδομένη χρονική στιγμή t_0 (έστω $t_0=0$) ορίζουν το **υλικό διάνυσμα θέσης**:

$$\mathbf{R}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$$

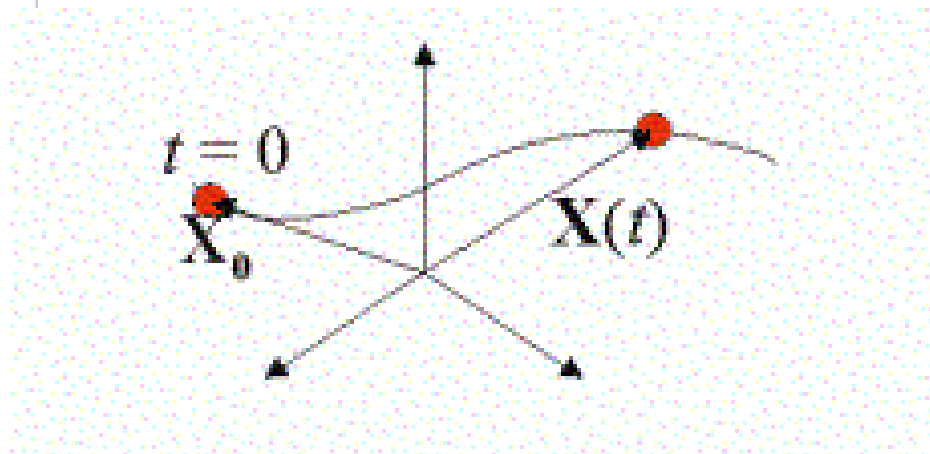
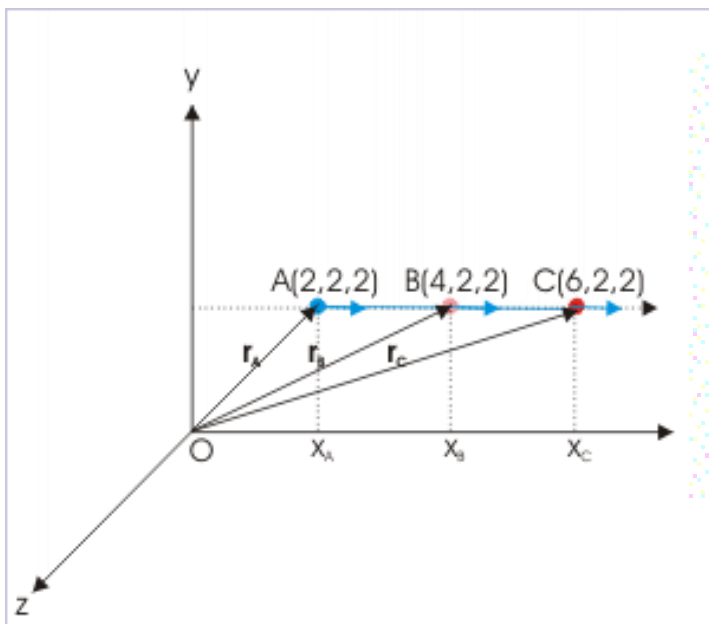
Υλικές και χωρικές συντεταγμένες

- Για δεδομένη χρονική στιγμή t μπορούν δύο σωματίδια ρευστού να έχουν το ίδιο **υλικό διάνυσμα θέσης**;



$$\mathbf{R}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$$

- Το ίδιο **υλικό διάνυσμα θέσης** αποτελεί την «ταυτότητα» του σωματιδίου



Υλικές και χωρικές συντεταγμένες

- Έστω σωματίδιο ρευστού. Η θέση του στο χώρο τη χρονική στιγμή t ορίζεται από τις χωρικές συντεταγμένες x, y, z .
 - Οι χωρικές συντεταγμένες x, y, z ορίζουν το χωρικό διάνυσμα θέσης:

$$\mathbf{R} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

- Οι χωρικές συντεταγμένες x, y, z δεν σχετίζονται κατ' ανάγκη με συγκεκριμένο σωματίδιο, αλλά ορίζουν μια θέση στο χώρο

Υλικές και χωρικές συντεταγμένες

- Πως συνδέονται οι **χωρικές συντεταγμένες** x, y, z με τις **υλικές συντεταγμένες** x_0, y_0, z_0 ;

$$\mathbf{R} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

- V_S .

$$\mathbf{R}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$$

Υλικές και χωρικές συντεταγμένες

- Πως συνδέονται οι **χωρικές συντεταγμένες** x, y, z με τις **υλικές συντεταγμένες** x_0, y_0, z_0 :

$$x = x_0 + \int_0^t \frac{dx}{dt} dt$$

$$y = y_0 + \int_0^t \frac{dy}{dt} dt$$

$$z = z_0 + \int_0^t \frac{dz}{dt} dt$$

Πολλαπλασιάζοντας
τις εξισώσεις κατά
σειρά με τα
μοναδιαία
διανύσματα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

Υλικές και χωρικές συντεταγμένες

- Πως συνδέονται οι **χωρικές συντεταγμένες** x, y, z με τις **υλικές συντεταγμένες** x_0, y_0, z_0 ;

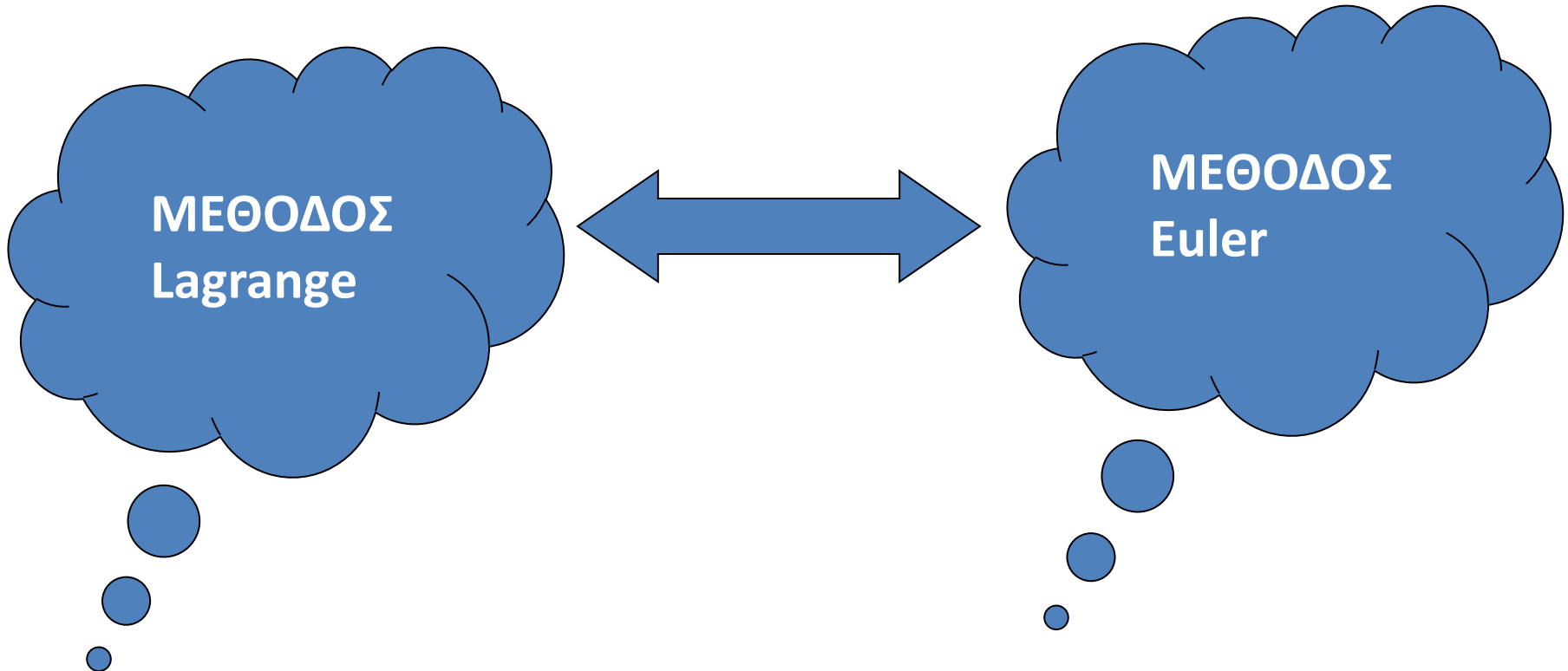
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \int_0^t \frac{d\mathbf{R}}{dt} dt$$

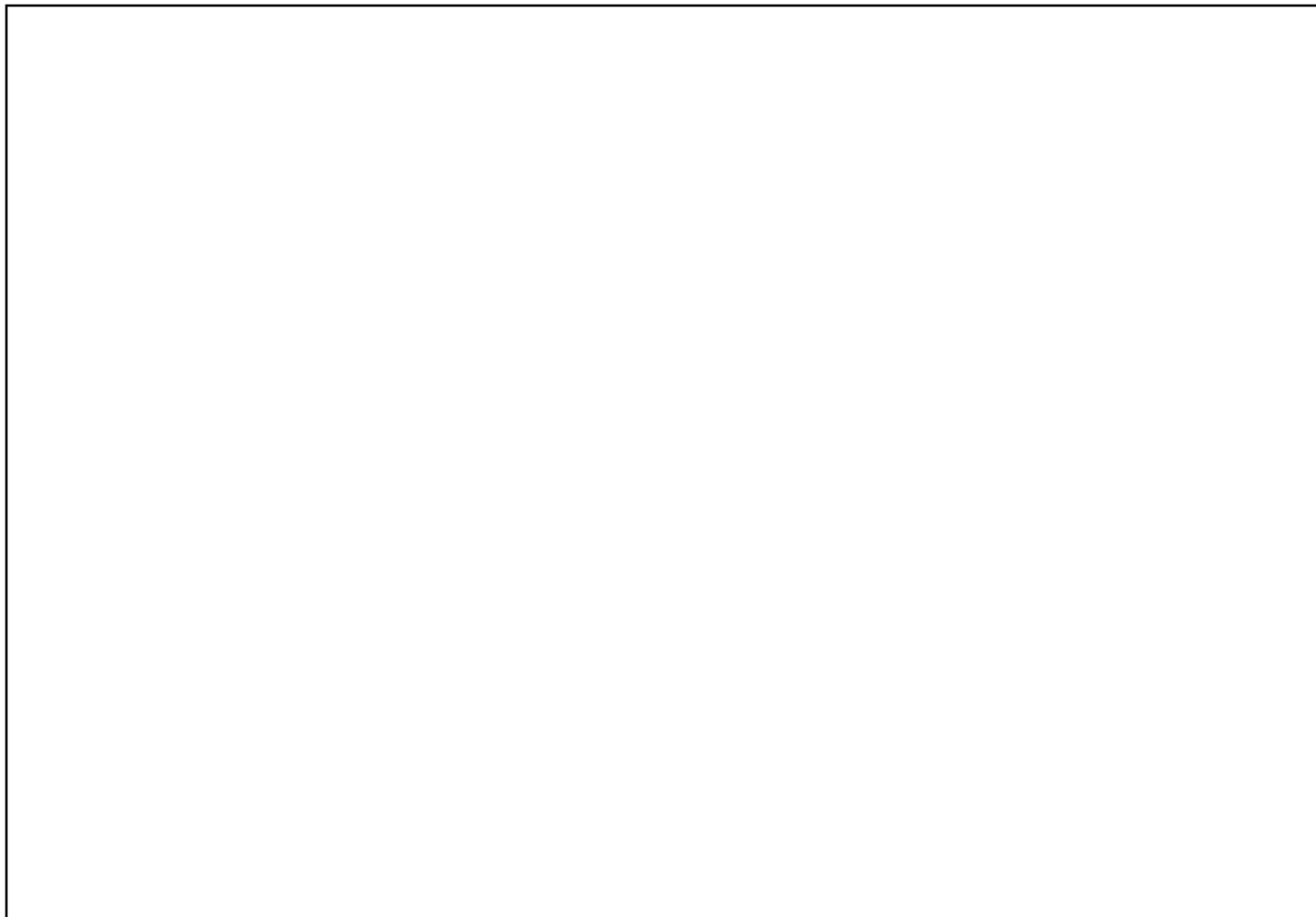
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t) = \mathbf{R}(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t) = \mathbf{R}(\text{σωματίδιο}, t)$$

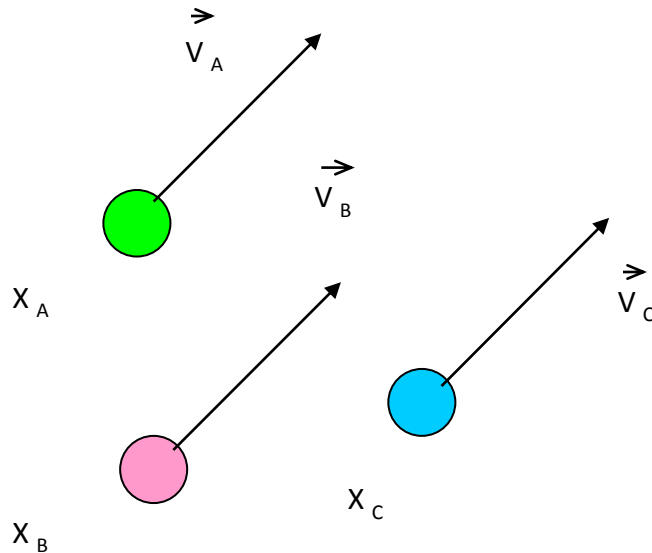
Περιγραφές πεδίων ροής

- Δύο προσεγγίσεις στη μηχανική των ρευστών

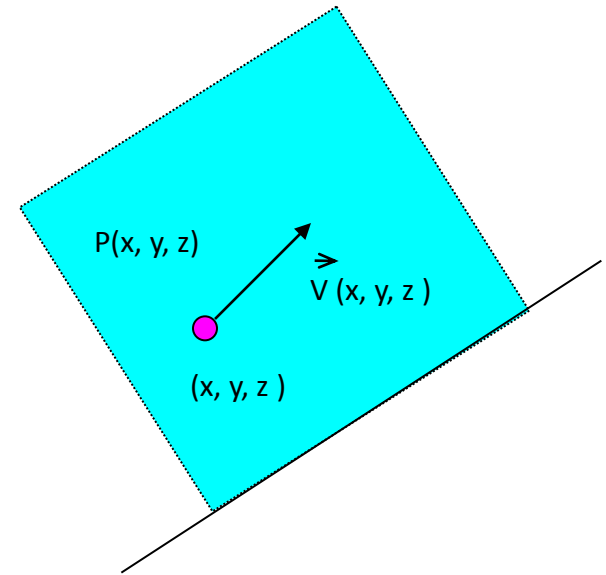




Μέθοδος Lagrange και μέθοδος Euler

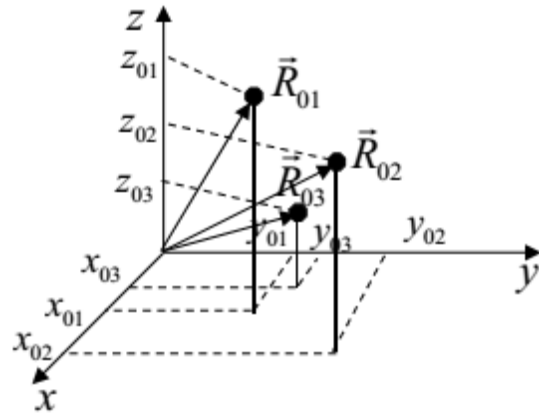


Κατά τη μέθοδο Lagrange, ο παρατηρητής παρακολουθεί την κίνηση και τις μεταβολές των ιδιοτήτων ορισμένου σωματιδίου του ρευστού

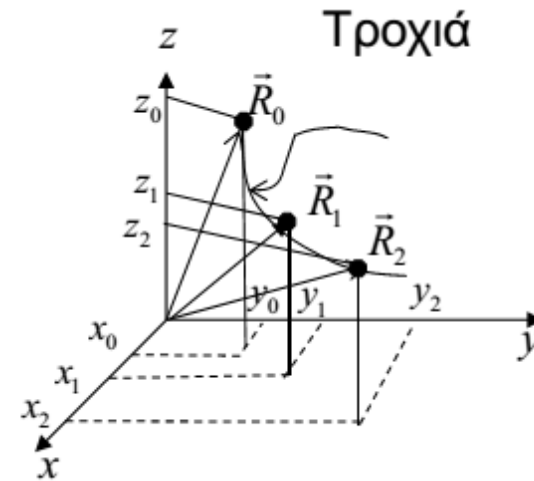


Κατά τη μέθοδο Euler, ο παρατηρητής εστιάζει την προσοχή του σε συγκεκριμένη περιοχή και παρακολουθεί τις μεταβολές των ιδιοτήτων στην περιοχή αυτή

Μέθοδος Lagrange και μέθοδος Euler



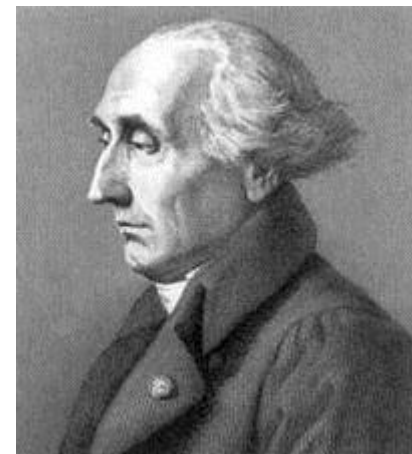
Κατά τη μέθοδο Lagrange, ο παρατηρητής παρακολουθεί την κίνηση και τις μεταβολές των ιδιοτήτων ορισμένου σωματιδίου του ρευστού



Κατά τη μέθοδο Euler, ο παρατηρητής εστιάζει την προσοχή του σε συγκεκριμένη περιοχή και παρακολουθεί τις μεταβολές των ιδιοτήτων στην περιοχή αυτή

Μέθοδος Lagrange

- Η μέθοδος παρακολουθεί τη θέση την ταχύτητα και την επιτάχυνση μεμονωμένων σωματιδίων. (πχ. Μπίλιες στο μπιλιάρδο.)
- Η κίνηση περιγράφεται από τους νόμους του Νεύτωνα.
- Δεν συνίσταται για ανάλυση της ροής σε πρακτικές εφαρμογές
 - Μεγάλος αριθμός μορίων/ σωματιδίων.
 - Αδυναμία περιγραφής των αλληλεπιδράσεων μεταξύ τους.
- Χρησιμεύει σε ειδικές εφαρμογές
 - Sprays σωματίδια, δυναμική διφασικών ροών (φυσαλίδες), αέρια σε χαμηλή πίεση
 - Συζευγμένες μέθοδοι Euler-Lagrange.
- Joseph Louis Lagrange (1736-1813).



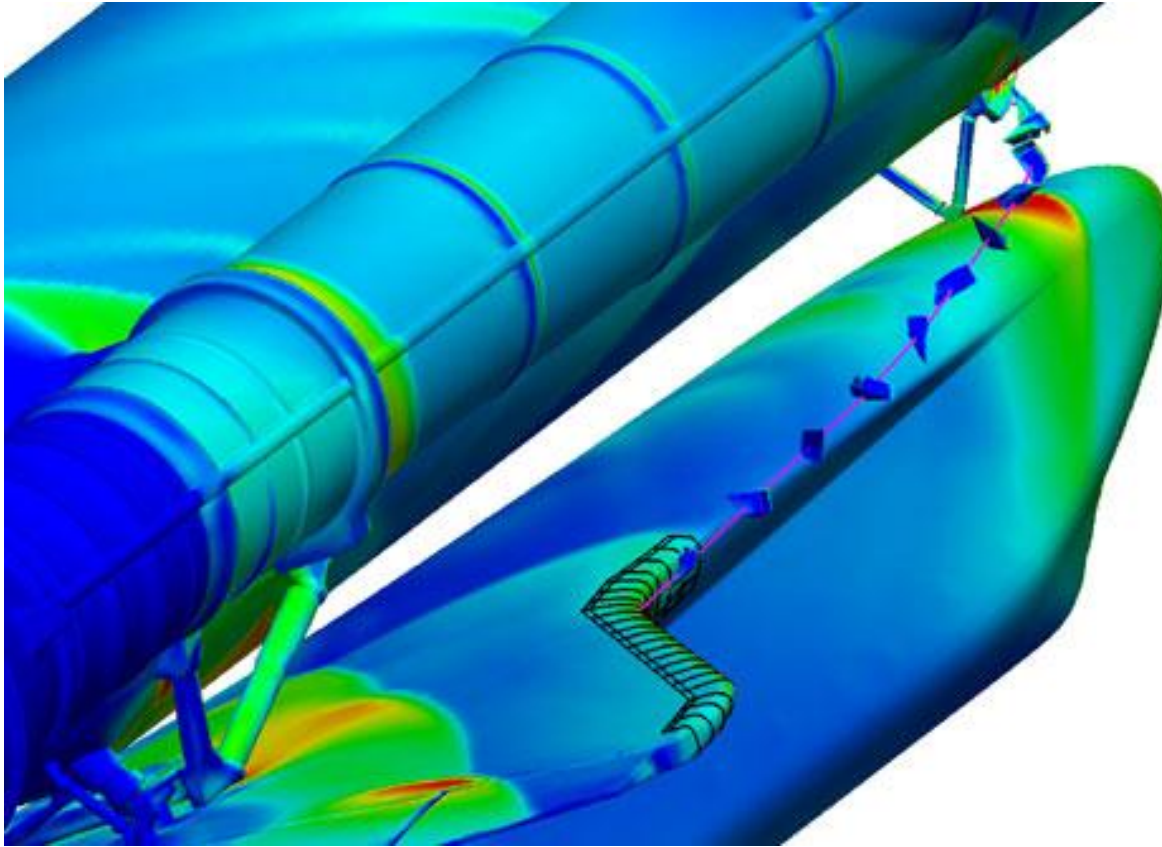
Example: Coupled Eulerian-Lagrangian Method



- Global Environmental MEMS Sensors (GEMS)
- Simulation of micron-scale airborne probes. The probe positions are tracked using a Lagrangian particle model embedded within a flow field computed using an Eulerian CFD code.

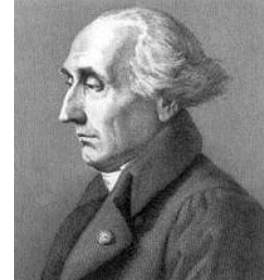
http://www.ensco.com/products/atmospheric/gem/gem_ovr.htm

Example: Coupled Eulerian-Lagrangian Method



Forensic analysis of Columbia accident: simulation of shuttle debris trajectory using Eulerian CFD for flow field and Lagrangian method for the debris.

Μέθοδος Lagrange



- Έστω το σωματίδιο με το υλικό διάνυσμα θέσης $\mathbf{R}_0$

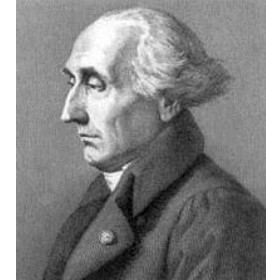
- Για $t_0=0$ βρίσκεται στο $P_0 (x_0, y_0, z_0)$
- Κατά την κίνησή του βρίσκεται σε συνεχή θερμική επικοινωνία με το περιβάλλον του ανταλλάσσοντας θερμική ενέργεια (ποια είναι η προϋπόθεση;)
- Η ανταλλαγή ενέργειας αλλάζει τη θερμοκρασία του T η οποία εξαρτάται από τη θέση του στο χώρο και το χρόνο t που χρειάστηκε για την πορεία του από την αρχική του θέση μέχρι $P_0 (x_0, y_0, z_0)$ μέχρι την τελική του θέση $P (x, y, z)$

$$T = T(\mathbf{R}, t) \qquad \mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t) = \mathbf{R}(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$T = T[\mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t), t] = T(x(\mathbf{R}_0, t), y(\mathbf{R}_0, t), z(\mathbf{R}_0, t), t)$$

$$T = T(\mathbf{R}_0, t) = T(x_0, y_0, z_0, t)$$

Μέθοδος Lagrange



$$T = T(\mathbf{R}_0, t) = T(x_0, y_0, z_0, t)$$

Υλικές συντεταγμένες

χρόνος

Για μια οποιαδήποτε μεταβλητή του πεδίου ροής Θ :

$$\Theta = \Theta(\mathbf{R}_0, t) = \Theta(x_0, y_0, z_0, t)$$

Κατά τη μέθοδο Lagrange μόνο ο χρόνος είναι ανεξάρτητη μεταβλητή

Μέθοδος Euler

- Κατά τη μέθοδο ορίζεται ένας όγκος ελέγχου δια μέσω του οποίου ρέει το ρευστό.
- Ορίζονται μεταβλητές που είναι συναρτήσεις και του χώρου και του χρόνου.

- Πεδίο πίεσης, $P=P(x,y,z,t)$

- Πεδίο ταχύτητας,

$$\vec{V} = \vec{V}(x,y,z,t) \quad \vec{V} = u(x,y,z,t)\vec{i} + v(x,y,z,t)\vec{j} + w(x,y,z,t)\vec{k}$$

- Πεδίο επιτάχυνσης,

$$\vec{a} = \vec{a}(x,y,z,t) \quad \vec{a} = a_x(x,y,z,t)\vec{i} + a_y(x,y,z,t)\vec{j} + a_z(x,y,z,t)\vec{k}$$

Οι παραπάνω μεταβλητές (ή και άλλες) ορίζουν το πεδίο ροής.

- Η μέθοδος συνίσταται για τη διατύπωση των αρχικών
οριακών συνθηκών σε μερικές διαφορικές εξισώσεις.

- Leonhard Euler (1707-1783).



Μέθοδος Euler

- Έστω η θερμοκρασία T στο σημείο $P (x, y, z)$ στο χώρο
 - Η τιμή της θερμοκρασίας εξαρτάται από το χωρικό άνυσμα $\mathbf{R}$

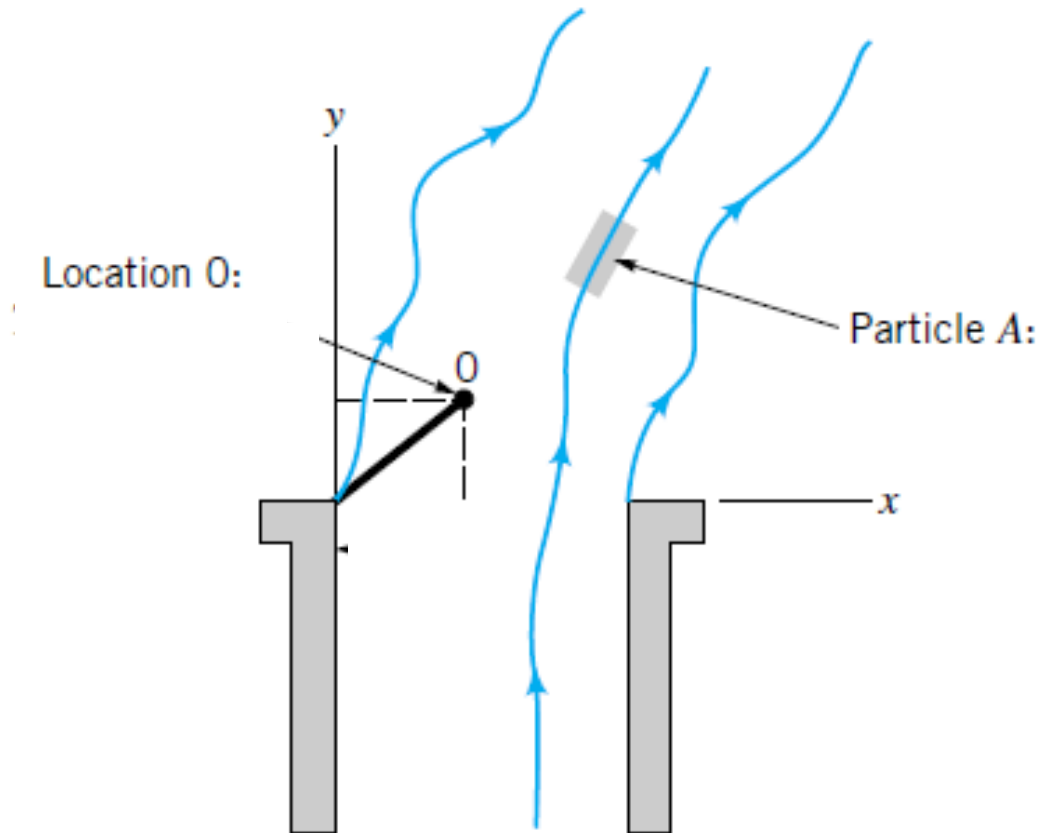
$$T = T(\mathbf{R}, t) = T(x, y, z, t)$$

- Το χωρικό άνυσμα $\mathbf{R}$ εξαρτάται από τη θέση του παρατηρητή.
- Για μια οποιαδήποτε μεταβλητή του πεδίου ροής Θ :

$$\Theta = \Theta(\mathbf{R}, t) = \Theta(x, y, z, t)$$



Eulerian and Lagrangian descriptions of temperature of a flowing fluid.



Euler

Τοποθετούμε ένα μετρητικό (π.χ. θερμόμετρο) σε σταθερό σημείο 0 και καταγράφουμε τις μεταβολές συναρτήσει του χρόνου. Σε διαφορετικές στιγμές διαφορετικά σωματίδια ρευστού περνούν από το σημείο της μέτρησης. Έτσι η θερμοκρασία είναι συνάρτηση της θέσης x, y, z και του χρόνου:

$$T = T(x, y, z, t)$$

Lagrange

Τοποθετούμε ένα μετρητικό (π.χ. θερμόμετρο) πάνω σε συγκεκριμένο σωματίδιο A του ρευστού και καταγράφουμε τις μεταβολές συναρτήσει του χρόνου κατά την κίνησή του. Η καταγραφή της θερμοκρασίας εξαρτάται από το σωματίδιο (που με τη σειρά του περιγράφεται από το υλικό διάνυσμα θέσης που το χαρακτηρίζει) και το χρόνο:

$$T = T(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t)$$

Πολλαπλά μετρητικά θα μπορούσαν να περιγράψουν το πεδίο της θερμοκρασίας,

$$T = T(x, y, z, t).$$

Η θερμοκρασία ενός σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου δεν θα μπορούσε να είναι γνωστή εκτός εάν η θέση του σωματιδίου είναι γνωστή συναρτήσει του χρόνου.

Πολλαπλά μετρητικά θα μπορούσαν να προσαρτηθούν σε πολλά σωματίδια ρευστού και να είναι γνωστή η θερμοκρασία τους συναρτήσει του χρόνου κατά την κίνησή τους. Η θερμοκρασία δεν θα μπορούσε να είναι γνωστή ως συνάρτηση του χώρου εκτός εάν η θέση του σωματιδίου είναι γνωστή συναρτήσει του χρόνου.

Εάν υπάρχει επαρκής πληροφορία, η περιγραφή Euler μπορεί να εξαχθεί από την περιγραφή Lagrange και το αντίστροφο

Χρονικές Παράγωγοι

- Τοπική παράγωγος
 - Ρυθμός μεταβολής μιας μεταβλητής ως προς ακίνητο παρατηρητή
- Υλική παράγωγος
 - Ρυθμός μεταβολής μιας μεταβλητής ως προς παρατηρητή που κινείται μαζί με το ρευστό (Lagrange)
- Ολική παράγωγος
 - Ρυθμός μεταβολής μιας μεταβλητής ως προς παρατηρητή που κινείται ανεξάρτητα από το ρευστό

- Τοπική παράγωγος
 - Ρυθμός μεταβολής μιας μεταβλητής ως προς ακίνητο παρατηρητή

$$T = T(\mathbf{R}, t) = T(x, y, z, t)$$

- Η παράγωγος για σταθερό άνυσμα θέσης $\mathbf{R}$ δίνει το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας σε συγκεκριμένη θέση:

$$\left(\frac{dT}{dt} \right)_{\mathbf{R}} = \left(\frac{dT}{dt} \right)_{(x,y,z)} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

- Τοπική παράγωγος $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{\mathbf{R}} = \left(\frac{dT}{dt}\right)_{(x,y,z)} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$
- Για σημείο του χώρου καταγράφω με το μετρητικό μου (θερμόμετρο) τη θερμοκρασία συναρτήσει του χρόνου και προσδιορίζω την κλίση της
 - η μέτρησή μου αφορά ένα ή περισσότερα σωματίδια ρευστού;
- Για οποιαδήποτε μεταβλητή αντίστοιχα:

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right) = \text{Ρυθμός μεταβολής ως προς ακίνητο παρατηρητή}$$

- Τοπική παράγωγος $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{\mathbf{R}} = \left(\frac{dT}{dt}\right)_{(x,y,z)} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$
- Για σημείο του χώρου καταγράφω με το μετρητικό μου (θερμόμετρο) τη θερμοκρασία συναρτήσει του χρόνου και προσδιορίζω την κλίση της
 - η μέτρησή μου αφορά ένα ή περισσότερα σωματίδια ρευστού; **Αφορά τις θερμοκρασίες διαδοχικών σωματιδίων**
- Για οποιαδήποτε μεταβλητή αντίστοιχα:

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right) = \text{Ρυθμός μεταβολής ως προς ακίνητο παρατηρητή}$$

- Υλική παράγωγος
 - Ρυθμός μεταβολής μιας μεταβλητής ως προς παρατηρητή που κινείται μαζί με το ρευστό (Lagrange)

$$T = T[\mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t), t] = T(x(\mathbf{R}_0, t), y(\mathbf{R}_0, t), z(\mathbf{R}_0, t), t)$$

- Η παράγωγος για σταθερό υλικό άνυσμα $\mathbf{R}_0$ δίνει το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας για συγκεκριμένο σωματίδιο με την «ταυτότητα» $\mathbf{R}_0$:

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{\mathbf{R}_0} = \left(\frac{dT}{dt}\right)_{(\mathbf{R})} + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)_{(\mathbf{R}_0)} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)_{(\mathbf{R}_0)} + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)_{(\mathbf{R}_0)}$$

- Υλική παράγωγος $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{\mathbf{R}_0}$
 - ονομάζεται υλική, κατά Lagrange, ή ουσιαστική παράγωγος επειδή ταυτίζεται με το σωματίδιο που χαρακτηρίζει
 - Ο τελεστής της υλικής παραγώγου είναι:

$$\left(\frac{DT}{Dt}\right) = \left(\frac{dT}{dt}\right)_{\mathbf{R}_0}$$

- Η υλική παράγωγος ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας που καταγράφεται από μετρητικό τοποθετημένο πάνω σε συγκεκριμένο σωματίδιο με «ταυτότητα» $\mathbf{R}_0$

- Υλική παράγωγος

$$\frac{DT}{Dt} = \left(\frac{dT}{dt} \right)_{(\mathbf{R})} + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right)_{(\mathbf{R}_0)} + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \left(\frac{dy}{dt} \right)_{(\mathbf{R}_0)} + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \left(\frac{dz}{dt} \right)_{(\mathbf{R}_0)}$$

Οι χρονικές παράγωγοι των χωρικών συνταταγμένων ταυτίζονται με τις συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας:

$$\frac{DT}{Dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) v_x + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) v_y + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) v_z$$

- Υλική παράγωγος

$$\frac{DT}{Dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) v_x + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) v_y + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) v_z$$

Από τον ορισμό του ανυσματικού διαφορικού τελεστή ανάδελτα:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \Rightarrow$$

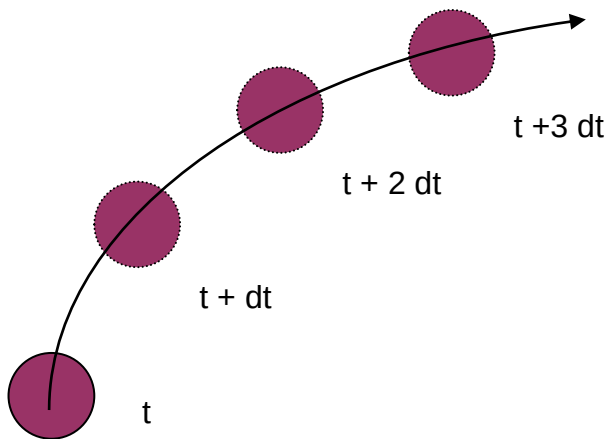
$$\frac{DT}{Dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla T$$

- Υλική παράγωγος

$$\frac{DT}{Dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla T$$

Τοπικός ρυθμός
μεταβολής της
θερμοκρασίας

Ρυθμός μεταβολής της
θερμοκρασίας
λόγω μεταφοράς του
σωματιδίου



- Το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε μεταβλητή Θ :

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \Theta$$

Τοπικός ρυθμός
μεταβολής της
μεταβλητής

Ρυθμός μεταβολής της μεταβλητής
λόγω μεταφοράς του σωματιδίου

- Το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{v} \cdot \nabla \Theta$ ονομάζεται τελεστής μεταφοράς
- Η παραπάνω εξίσωση ισχύει για το σημείο (x, y, z) στο οποίο βρίσκεται το σωματίδιο του ρευστού τη χρονική στιγμή t

- Σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) v_r + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) \frac{v_\theta}{r} + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) v_z$$

- Ολική παράγωγος

- Ρυθμός μεταβολής μιας μεταβλητής ως προς παρατηρητή που κινείται ανεξάρτητα από το ρευστό

$$\frac{d\Theta}{dt} = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) w_x + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) w_y + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) w_z$$

- Αντί για τις συνιστώσες της ταχύτητας $\mathbf{u}$, χρησιμοποιούμε τις συνιστώσες της ταχύτητας $\mathbf{w}$ του ανεξάρτητου παρατηρητή
- Η φυσική σημασία της ολικής παραγώγου θα προσδιοριζόταν από το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας που καταγράφει θερμόμετρο πάνω σε ελικόπτερο που κινείται ανεξάρτητα από τον αέρα.
- Στην περίπτωση που $\mathbf{u} = \mathbf{w}$, η υλική παράγωγος ταυτίζεται με την ολική

- Πως νιώθει τη μεταβολή της θερμοκρασίας ο αλεξιπτωτιστής
- (α) πριν ανοίξει το αλεξίπτωτο και
- (β) αφότου ανοίξει το αλεξίπτωτο



Δίνονται:

T συναρτήσει του ύψους z

$$T = T_0 - a z$$

$u = 300 \text{ km/h}$ για ελεύθερη πτώση

$u = 20 \text{ km/h}$ για πτώση με αλεξίπτωτο

Χρησιμοποιείτε τη σχέση:



$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) w_x + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) w_y + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) w_z$$

$$\frac{dT}{dt} = \overbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)}^0 + \overbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)}^0 w_x + \overbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)}^0 w_y + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) w_z$$



$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) w_z \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} (T - az) = -a$$

$$\frac{dT}{dt} = -a w_z$$

Πεδίο ταχύτητας

- Κατά Lagrange

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{R}_0, t) = \mathbf{v}(x_0, y_0, z_0, t)$$

Κατά Euler

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{v}(x, y, z, t)$$

Ποιες είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές σε κάθε περίπτωση;

- Έστω η απόσταση s κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής (η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της ταυτίζεται με τη διεύθυνση της ταχύτητας). Τότε:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(s, t)$$

Πεδίο ταχύτητας

- Η στιγμιαία ταχύτητα σωματιδίου που διέρχεται από το σημείο $P(x,y,z)$ που ορίζει το άνωσμα θέσης $\mathbf{R}$ είναι:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0}$$

Το $\mathbf{R}_0$ είναι το υλικό διάνυσμα του σωματιδίου και δεν μεταβάλλεται κατά την κίνησή του. Συνεπώς:

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{R}}{Dt}$$

Πεδίο ταχύτητας

- Η στιγμιαία ταχύτητα σωματιδίου που διέρχεται από το σημείο $P(x,y,z)$ που ορίζει το άνυσμα θέσης $\mathbf{R}$ είναι:

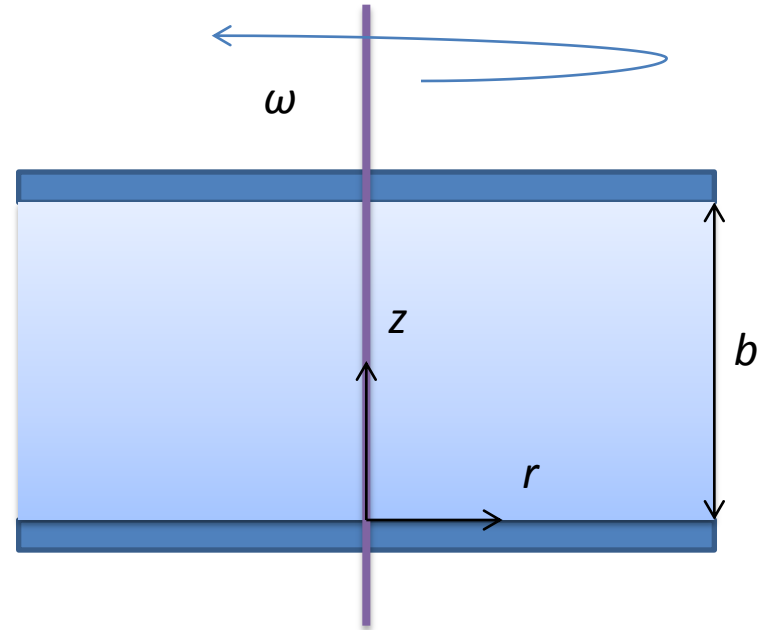
$$\mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0}$$

- Για $\mathbf{R} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z$$

- Η γνώση του πεδίου ταχύτητας είναι πρωταρχική για τον προσδιορισμό βασικών μεγεθών της ροής
(παροχή, επιτάχυνση κλπ)

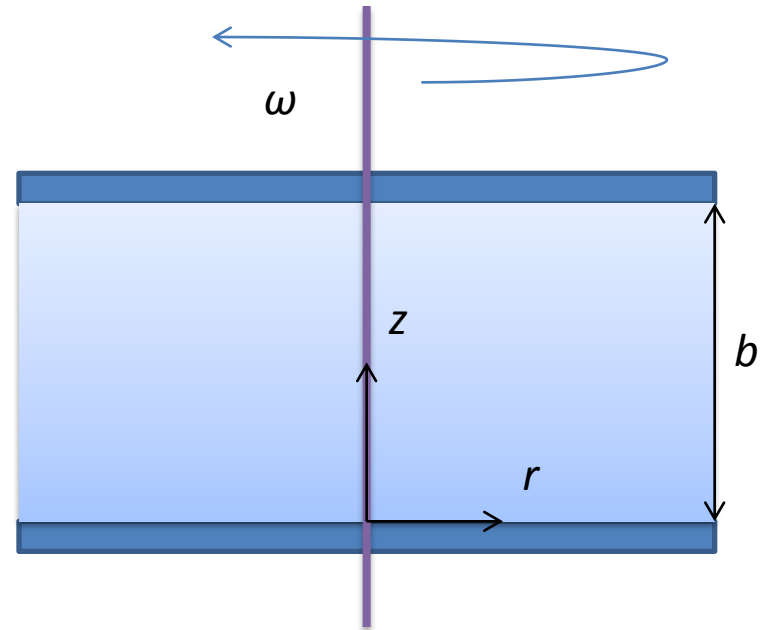
- Ιξώδες ρευστό
βρίσκεται μεταξύ δύο
δίσκων. Ο κάτω δίσκος
είναι ακίνητος και ο
πάνω περιστρέφεται με
σταθερή γωνιακή
ταχύτητα ω .
- Εάν η ταχύτητά του
μεταβάλλεται γραμμικά
κατά τον z (από τον
κάτω προς τον πάνω
δίσκο) βρείτε την
αναλυτική έκφραση του
πεδίου ταχύτητας



Κυλινδρικές συντεταγμένες?

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_r v_r + \mathbf{e}_\theta v_\theta + \mathbf{e}_z v_z$$

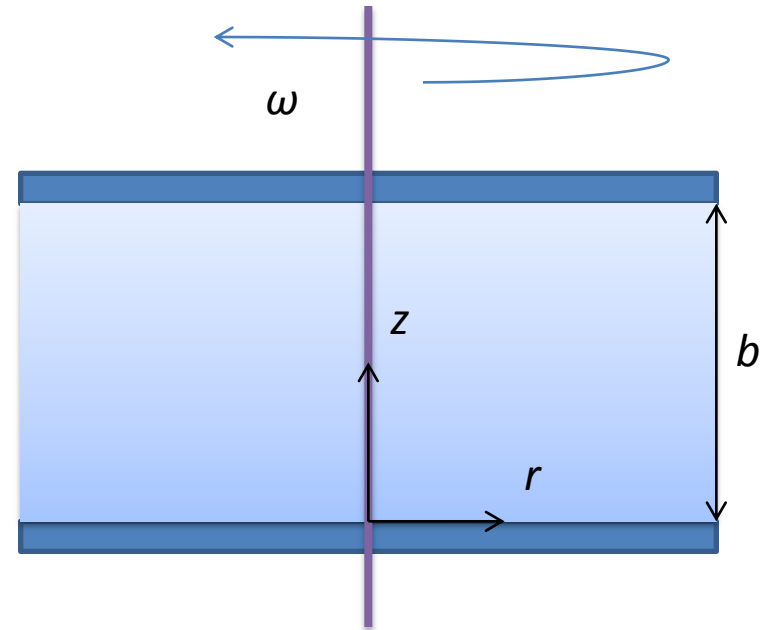
- Ποιες συνιστώσες της ταχύτητας είναι μηδενικές;
- Θυμηθείτε:
 - η κίνηση είναι καθαρά περιστροφική



Κυλινδρικές συντεταγμένες?

$$\mathbf{v} = \overset{0}{\mathbf{e}_r v_r} + \mathbf{e}_\theta v_\theta + \overset{0}{\mathbf{e}_z v_z}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_\theta v_\theta$$



Η μόνη μη μηδενική συνιστώσα είναι η v_θ που στη γενική περίπτωση είναι συνάρτηση:

$$v_\theta = v_\theta(r, \vartheta, z)$$

Λόγω συμμετρίας η ταχύτητα δεν μπορεί να μεταβάλλεται κατά τη γωνία περιστροφής για μόνιμη ροή:

$$v_\theta = v_\theta(r, z)$$

Αφού η ταχύτητα είναι γραμμική συνάρτηση της απόστασης από την κάτω στην πάνω πλάκα θα έχει τη μορφή: $v_\theta = zf(r) + c$

Οριακές Συνθήκες?

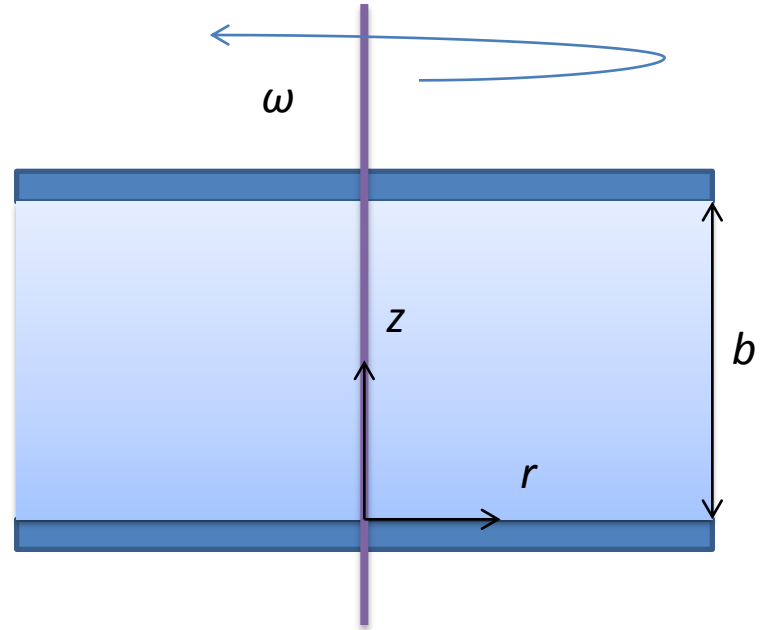
$$v_{\theta} = zf(r) + c$$

$$c = 0$$

$$v_{\theta} \Big|_{z=0} = 0$$

$$v_{\theta} \Big|_{z=b} = \omega r$$

$$v_{\theta} = zf(r)$$



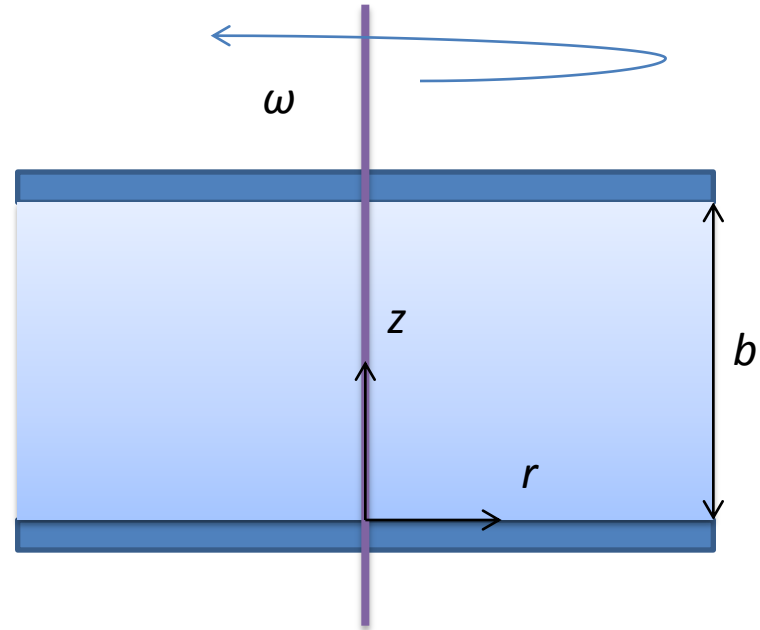
Πεδίο Ταχύτητας

$$v_{\theta} = zf(r)$$

$$v_{\theta}|_{z=b} = \omega r$$

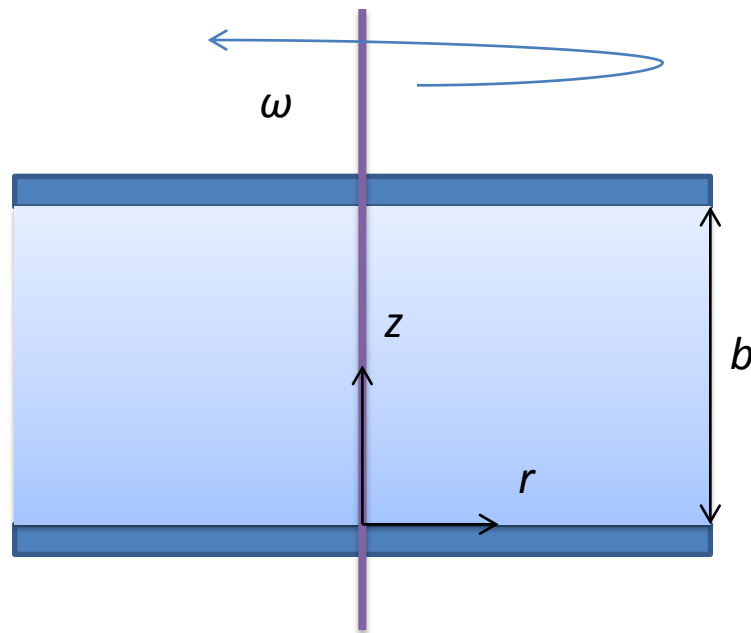
$$f(r) = \frac{\omega r}{b}$$

$$v_{\theta} = \frac{\omega r}{b} z$$



Καρτεσιανές συντεταγμένες?

$$v_{\theta} = \frac{\omega r}{b} z$$



$$\mathbf{e}_{\theta} = -\sin(\theta)\mathbf{i} + \cos(\theta)\mathbf{j}$$

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta), z = z$$

Το πεδίο της επιτάχυνσης

- Σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα για σωματίδιο ρευστού:

$$\dot{\vec{F}}_{particle} = m_{particle} \dot{\vec{a}}_{particle}$$

- Η επιτάχυνση ορίζεται ως η παράγωγος της ταχύτητας.

$$\dot{\vec{a}}_{particle} = \frac{d\dot{\vec{V}}_{particle}}{dt}$$

- Αφού η ταχύτητα του ρευστού σε συγκεκριμένο σημείο ταυτίζεται με την ταχύτητα του σωματιδίου:

$$\vec{V}_{particle}(t) = \vec{V}[x_{particle}(t), y_{particle}(t), z_{particle}(t), t]$$

- Και η παράγωγός της:

$$\dot{\vec{a}}_{particle} = \frac{\partial \dot{\vec{V}}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \dot{\vec{V}}}{\partial x} \frac{dx_{particle}}{dt} + \frac{\partial \dot{\vec{V}}}{\partial y} \frac{dy_{particle}}{dt} + \frac{\partial \dot{\vec{V}}}{\partial z} \frac{dz_{particle}}{dt}$$

- Αφού

$$\frac{dx_{particle}}{dt} = u, \frac{dy_{particle}}{dt} = v, \frac{dz_{particle}}{dt} = w$$

$$\vec{a}_{particle} = \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \dot{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \dot{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \dot{V}}{\partial z}$$

- Σε διανυσματική μορφή η επιτάχυνση είναι:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$$

- Αφού

$$\frac{dx_{particle}}{dt} = u, \frac{dy_{particle}}{dt} = v, \frac{dz_{particle}}{dt} = w$$

$$\vec{a}_{particle} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

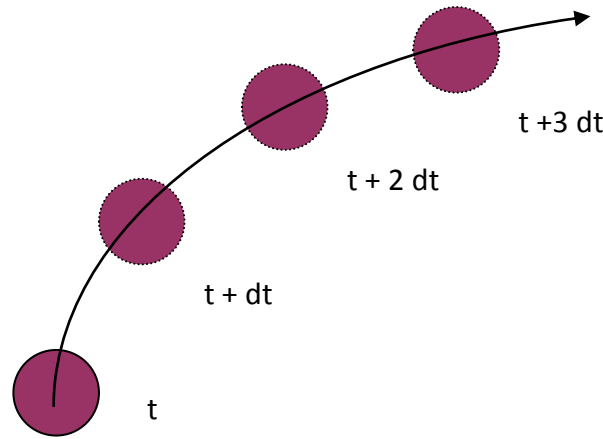
- Σε διανυσματική μορφή η επιτάχυνση είναι:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$$

Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας σε
ένα ορισμένο σημείο του χώρου

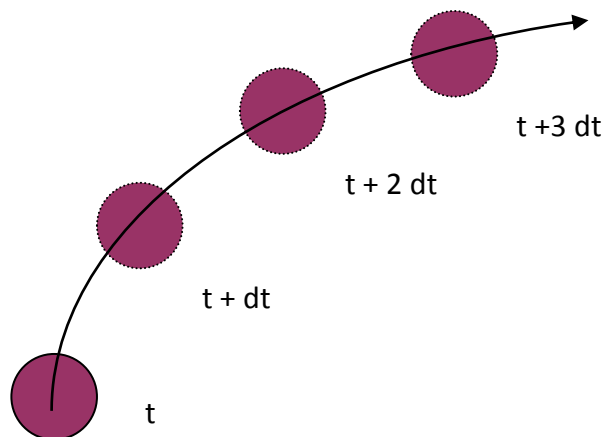
Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας λόγω
μεταφοράς του ρευστού στο χώρο

Σύμφωνα με τον ορισμό της Υλικής Παραγώγου:



Η υλική παράγωγος D/Dt αναφέρεται στην παρακολούθηση του σωματιδίου του ρευστού που κινείται στο πεδίο ροής.

Σύμφωνα με τον ορισμό της Υλικής Παραγώγου:



Η υλική παράγωγος D/Dt αναφέρεται στην παρακολούθηση του σωματιδίου του ρευστού που κινείται στο πεδίο ροής.

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

- Ο πρώτος όρος είναι η τοπική επιτάχυνση και είναι διαφορετικός από το μηδέν για μη μόνιμες ροές.

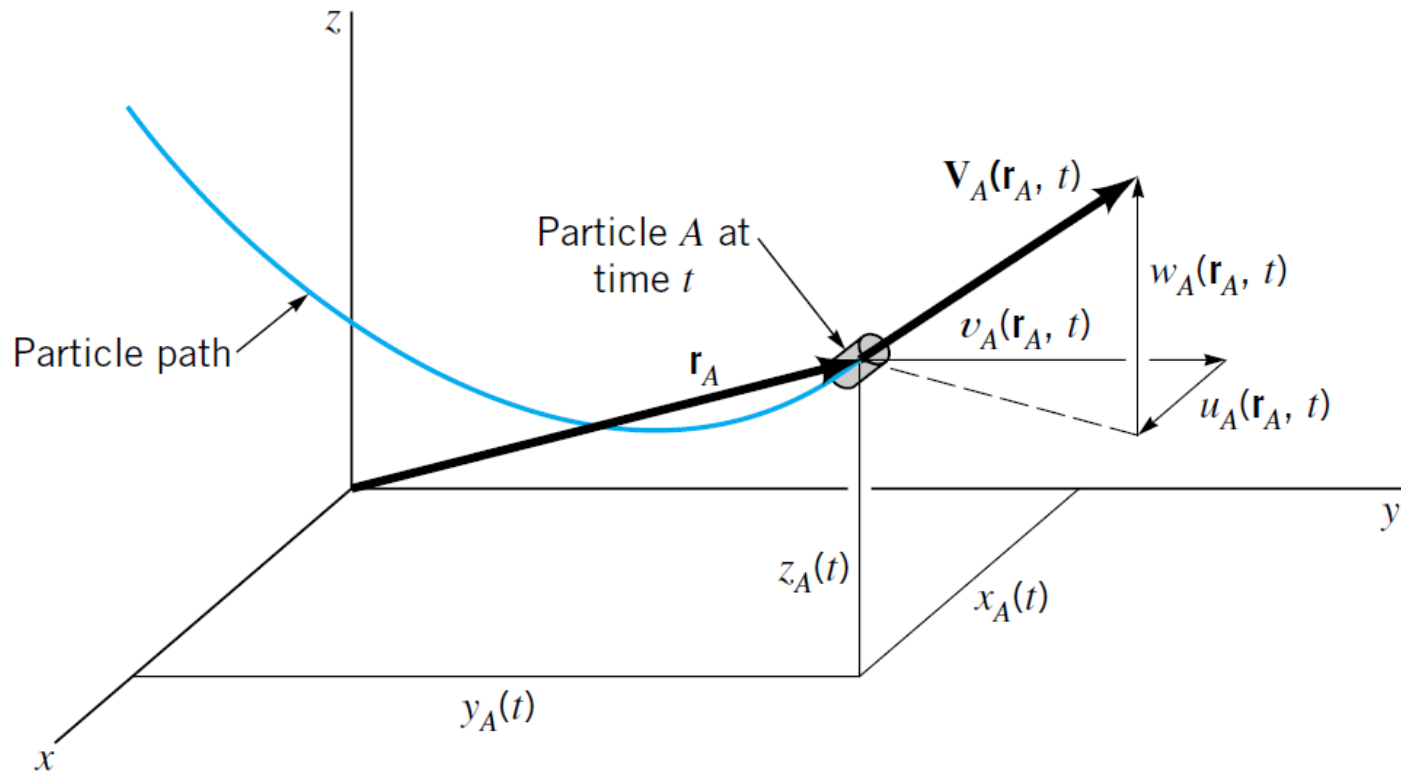
$$\mathbf{a}_\ell = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας} \\ \text{σε ένα ορισμένο σημείο του χώρου} \end{array} \right\}$$

- Ο δεύτερος όρος είναι η επιτάχυνση μεταφοράς και αναφέρεται στο φαινόμενο της μεταφοράς του σωματιδίου σε άλλη περιοχή του πεδίου ροής όπου η ταχύτητα είναι διαφορετική.

$$a_c = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας λό-} \\ \text{γω μεταφοράς του ρευστού στο χώρο} \end{array} \right\}$$

- Μπορεί η επιτάχυνση μεταφοράς να είναι μη μηδενική σε μόνιμη ροή;
- Τι συμβαίνει:
 - Σε αγωγό σταθερής διατομής;
 - Σε συγκλίνον ακροφύσιο;

Υλική Παράγωγος



$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_A(\mathbf{r}_A, t) = \mathbf{V}_A[x_A(t), y_A(t), z_A(t), t]$$

$$\mathbf{a}_A(t) = \frac{d\mathbf{V}_A}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial x} \frac{dx_A}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial y} \frac{dy_A}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial z} \frac{dz_A}{dt}$$

$$\mathbf{a}_A = \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial t} + u_A \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial x} + v_A \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial y} + w_A \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial z}$$

Το σωματίδιο A ταυτίζεται με το διάνυσμα θέσης $\mathbf{R}_0$ που είναι σταθερό (Αφού η ταχύτητα του ρευστού σε συγκεκριμένο σημείο ταυτίζεται με την ταχύτητα του σωματιδίου):

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$$

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

Το εσωτερικό γινόμενο της παραπάνω σχέσης με το μοναδιαίο διάνυσμα δίνει τις συνιστώσες της ταχύτητας:

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i$$

Η αναλυτικά:

$$a_x = \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΟΡΟΙ

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i$$

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_r \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$$

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

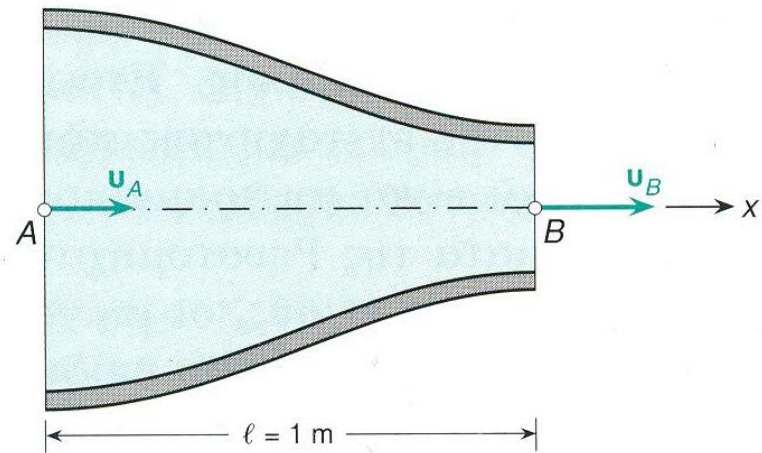
ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΟΡΟΙ

Πεδίο ταχύτητας:

$$\mathbf{v} = \frac{2t}{(1 - x/2\ell)^2} \mathbf{i}$$

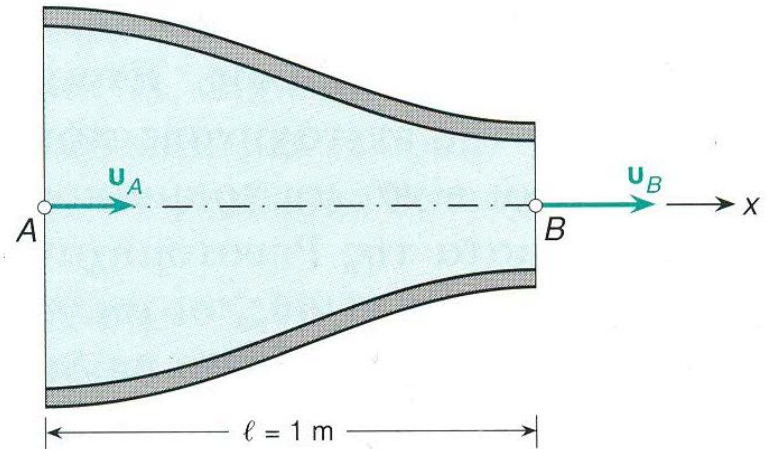
Για $t = 2 \text{ s}$ στα σημεία A και B :

- Ταχύτητα;
- Τοπική επιτάχυνση;
- Επιτάχυνση μεταφοράς;
- Ολική επιτάχυνση;



Πεδίο ταχύτητας:

$$\mathbf{v} = \frac{2t}{(1 - x/2\ell)^2} \mathbf{i}$$



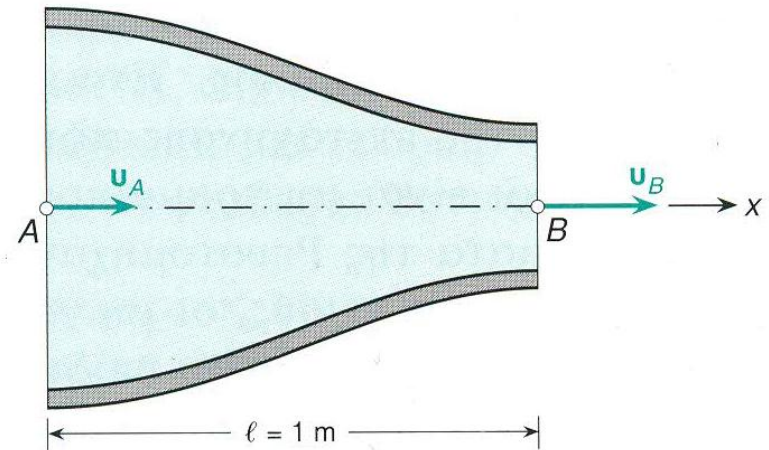
Για $t = 2 \text{ s}$, η ταχύτητα στα σημεία A και B :

$$\mathbf{v}_A = \frac{2(2)}{(1 - 0)^2} \mathbf{i} \text{ m/s} = 4\mathbf{i} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_B = \frac{2(2)}{(1 - 1/2)^2} \mathbf{i} \text{ m/s} = 16\mathbf{i} \text{ m/s}$$

Πεδίο ταχύτητας:

$$\mathbf{v} = \frac{2t}{(1 - x/2\ell)^2} \mathbf{i}$$



Για $t = 2 \text{ s}$, η τοπική επιτάχυνση στα σημεία A και B:

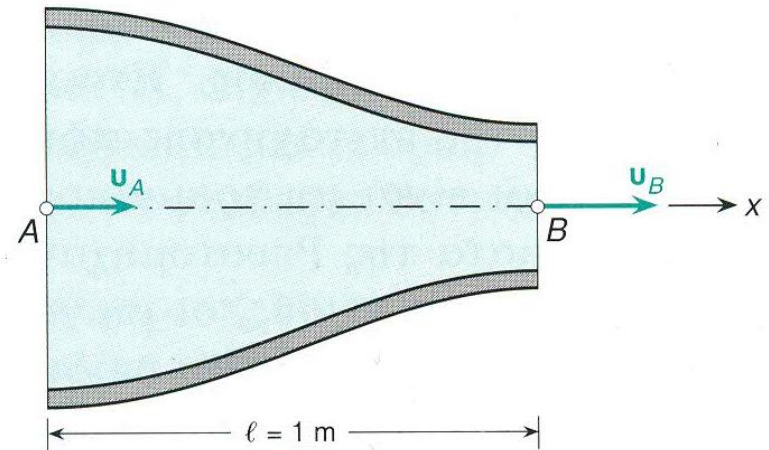
$$\mathbf{a}_\ell = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{2t}{(1 - x/2\ell)^2} \right] \mathbf{i} = \frac{2}{(1 - x/2\ell)^2} \mathbf{i}$$

$$\mathbf{a}_{\ell, A} = \frac{2}{(1 - 0)^2} \mathbf{i} \text{ m/s}^2 = 2\mathbf{i} \text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{a}_{\ell, B} = \frac{2}{(1 - 1/2)^2} \mathbf{i} \text{ m/s}^2 = 8\mathbf{i} \text{ m/s}^2$$

Πεδίο ταχύτητας:

$$\mathbf{v} = \frac{2t}{(1 - x/2\ell)^2} \mathbf{i}$$



Για $t = 2 \text{ s}$, η επιτάχυνση μεταφοράς στα σημεία A και B:

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = (v_x \mathbf{i}) \cdot \nabla (v_x \mathbf{i}) = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \mathbf{i} = \left(\frac{2t}{(1 - x/2\ell)^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2t}{(1 - x/2\ell)^2} \right) \mathbf{i}$$

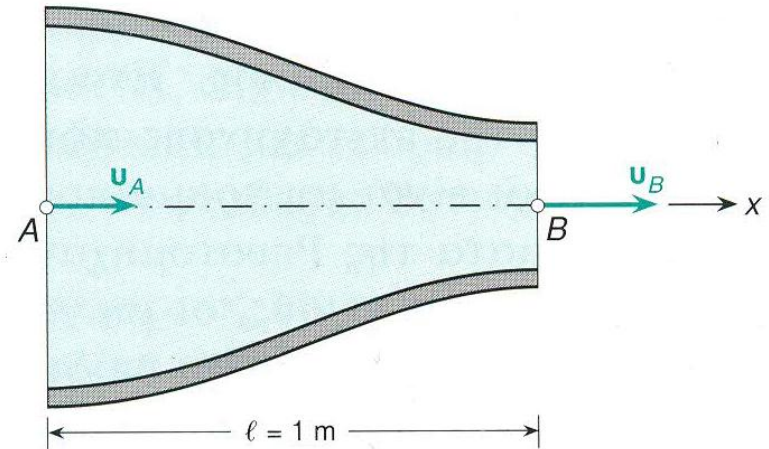
$$\mathbf{a}_c = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \left(\frac{2t}{(1 - x/2\ell)^2} \right) \left(\frac{2t(-2)}{(1 - x/2\ell)^3} \right) \left(-\frac{1}{2\ell} \right) \mathbf{i} = \frac{4t^2}{(1 - x/2\ell)^5 \ell} \mathbf{i}$$

$$\mathbf{a}_{c, A} = \frac{4(2)^2}{(1 - 0)^5 (1)} \mathbf{i} \text{ m/s}^2 = 16 \mathbf{i} \text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{a}_{c, B} = \frac{4(2)^2}{(1 - 1/2)^5 (1)} \mathbf{i} \text{ m/s}^2 = 512 \mathbf{i} \text{ m/s}^2$$

Πεδίο ταχύτητας:

$$\mathbf{v} = \frac{2t}{(1 - x/2\ell)^2} \mathbf{i}$$

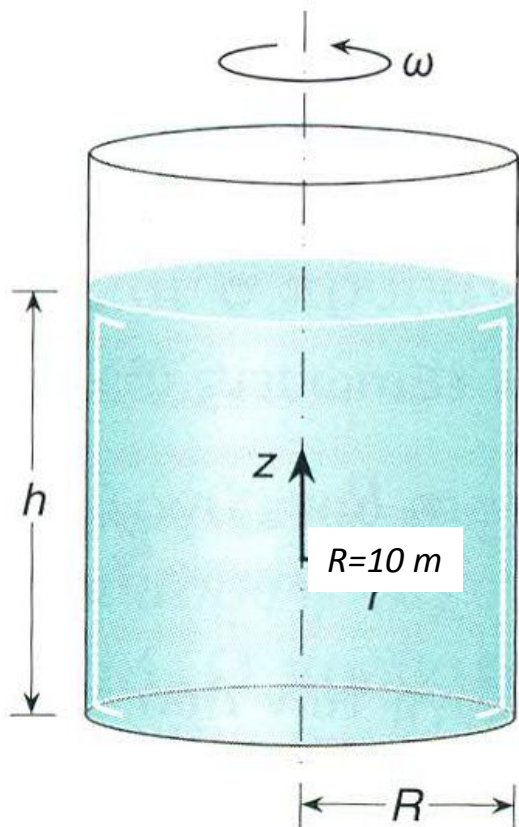


Για $t = 2 \text{ s}$, η ολική επιτάχυνση στα σημεία A και B :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\ell + \mathbf{a}_c$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{\ell,A} + \mathbf{a}_{c,A} = (2\mathbf{i} + 16\mathbf{i}) \text{ m/s}^2 = 18\mathbf{i} \text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{\ell,B} + \mathbf{a}_{c,B} = (8\mathbf{i} + 512\mathbf{i}) \text{ m/s}^2 = 520\mathbf{i} \text{ m/s}^2$$

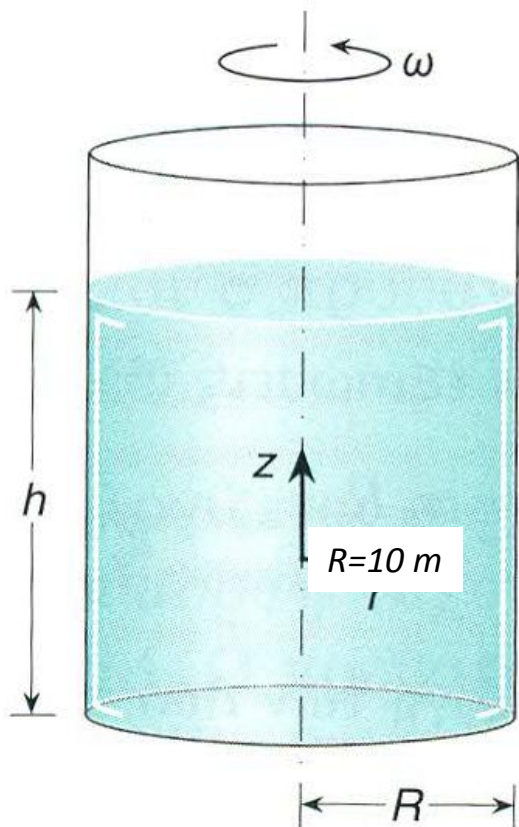


Από $0 \leq t \leq 2\text{s}$: $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \frac{t}{\tau} \mathbf{k}$

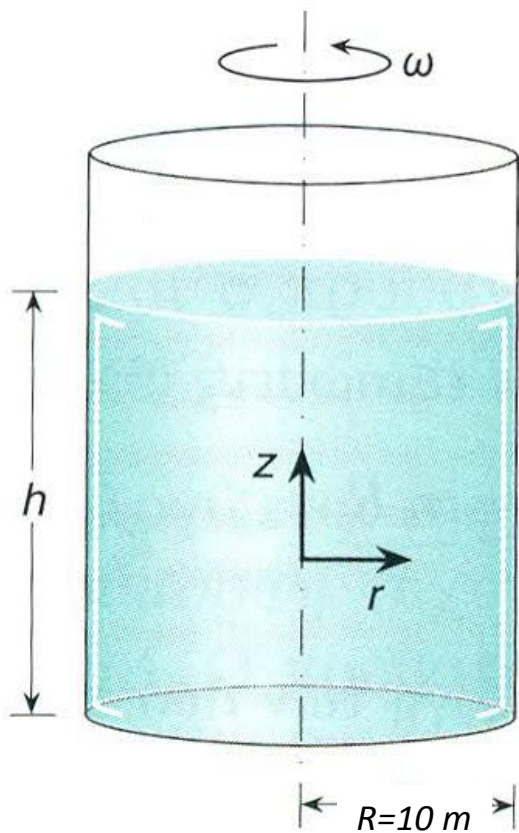
Για $t > 2\text{s}$: $\omega = \omega_0 = 80\text{ RPM}$

Ποια είναι η επιτάχυνση των σωματιδίων του ρευστού στην επιφάνεια του δοχείου:

- Για μεταβατική ροή ($t = 1\text{s}$)
- Για μόνιμη ροή ($t = 5\text{s}$)

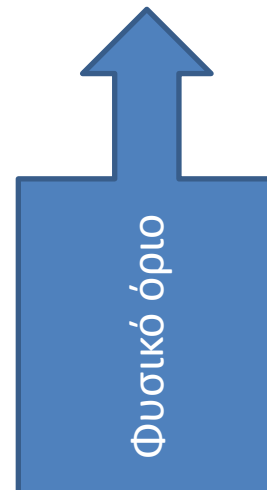


Για κάθε σωματίδιο του ρευστού στην επιφάνεια, ποιες είναι η εκφράσεις της γραμμικής ταχύτητας;



Για κάθε σωματίδιο του ρευστού στην επιφάνεια του δοχείου, ποιες είναι η εκφράσεις της γραμμικής ταχύτητας;

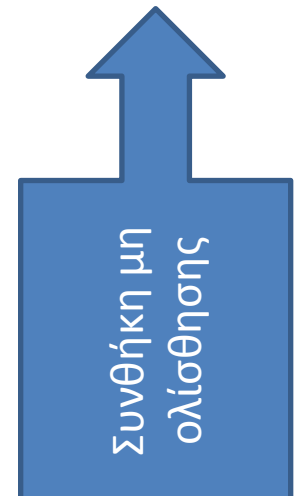
$$v_r = 0$$

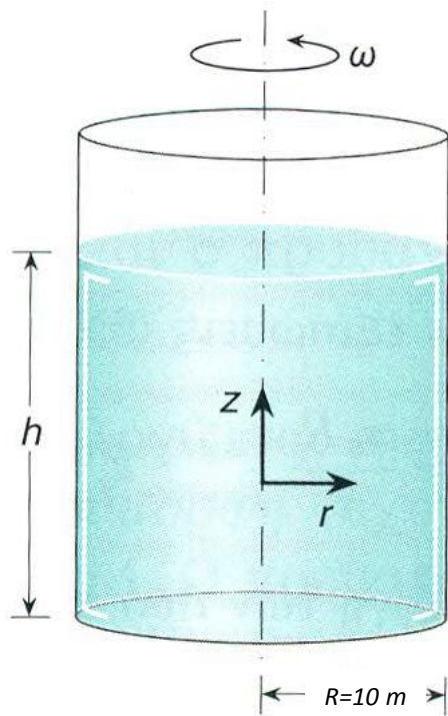


$$v_\theta = \omega R$$



$$v_z = 0$$





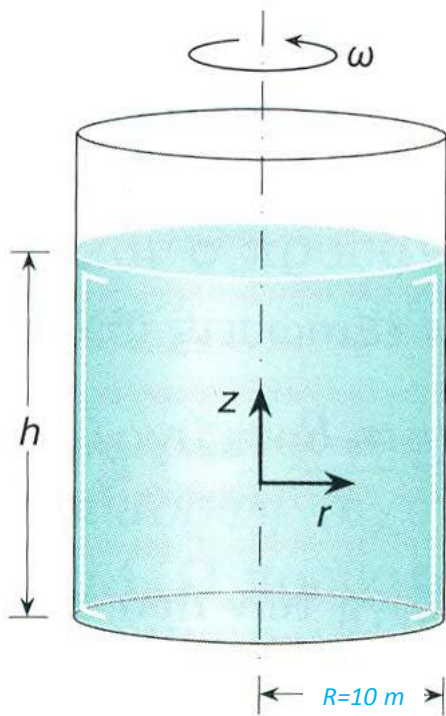
Ποιοι όροι της επιτάχυνσης συμμετέχουν;

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_z \mathbf{e}_z$$

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$



Ποιοι όροι της επιτάχυνσης συμμετέχουν;

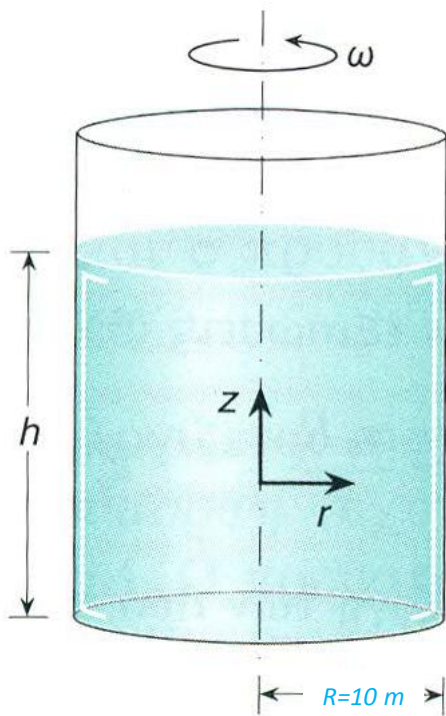
$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_z \mathbf{e}_z$$

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Λόγω συμμετρίας



Ποιοι όροι της επιτάχυνσης συμμετέχουν;

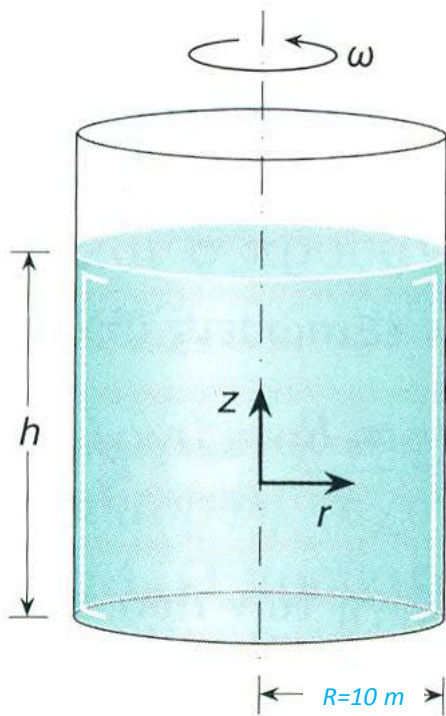
$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_z \mathbf{e}_z$$

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$v_z = 0$$



Ποιοι όροι της επιτάχυνσης συμμετέχουν;

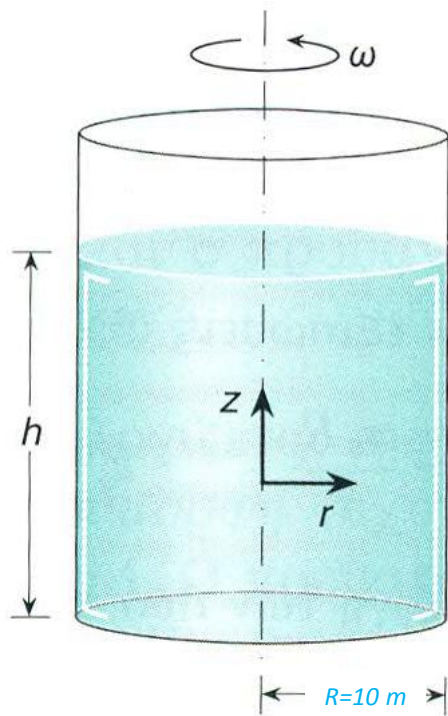
$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_z \mathbf{e}_z$$

$$a_r = \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial t}} + \cancel{v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}} + \cancel{\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}} - \frac{v_\theta^2}{r} + \cancel{v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \cancel{v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r}} + \cancel{\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \cancel{v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}}$$

$$a_z = \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + \cancel{v_r \frac{\partial v_z}{\partial r}} + \cancel{\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta}} + \cancel{v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}}$$

$$v_r = 0$$



$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_z \mathbf{e}_z$$

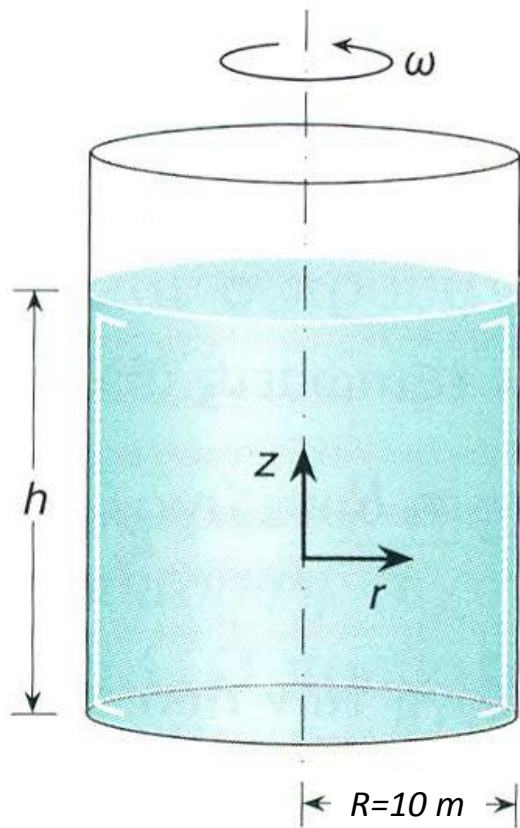
$$\begin{aligned}
 a_r &= \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial t}} + v_r \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r} \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial \theta}} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} \\
 a_\theta &= \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\
 a_z &= \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + v_r \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r} \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}}
 \end{aligned}$$

$$v_\theta = \omega R$$

$$a_r = -\frac{v_\theta^2}{r}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t}$$

$$a_z = 0$$



- Για μεταβατική ροή ($t = 1s$)

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \frac{t}{\tau} \mathbf{k}$$

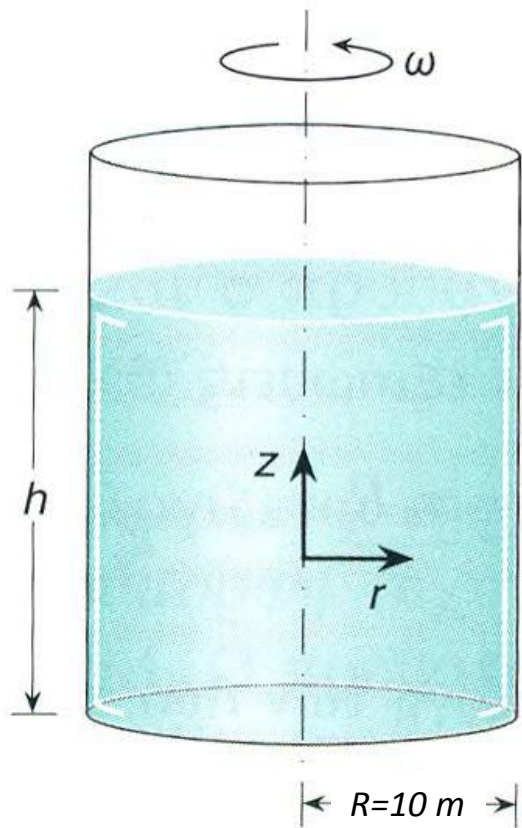
$$v_\theta = \frac{\omega_0 R t}{\tau}$$

$$a_r = -R \left(\frac{\omega_0 t}{\tau} \right)^2 \quad a_\theta = \frac{\omega_0 R}{\tau} \quad a_z = 0$$

$$a_r = - (0,10 \text{ m}) \left(80 \frac{\sigma\tau Q}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\sigma\tau Q} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{1 \text{ s}}{2 \text{ s}} \right)^2 = -1,75 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = \left(80 \frac{\sigma\tau Q}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\sigma\tau Q} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) \left(\frac{0,10 \text{ m}}{2 \text{ s}} \right) = 4,18 \text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{a} = -1,75 \mathbf{e}_r + 4,18 \mathbf{e}_\theta \quad (\text{m/s}^2)$$



- Για μόνιμη ροή ($t = 5\text{ s}$)

$$a_r = -\omega_0^2 R$$

Κεντρομόλος
επιτάχυνση

$$a_\theta = 0$$

Μηδενίζεται
λόγω
συμμετρίας

$$a_z = 0$$

Μηδενίζεται
λόγω
συμμετρίας

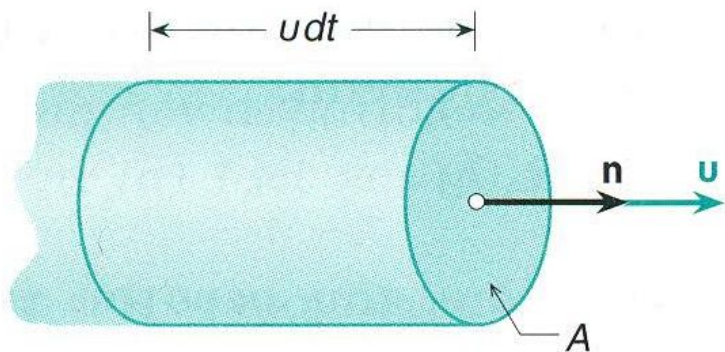
$$a_r = -\left(80 \frac{\sigma\tau\varrho}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\sigma\tau\varrho} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)^2 (0,10 \text{ m}) = -7,01 \text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{a} = -7,01 \mathbf{e}_r \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Ροή μάζας και όγκου

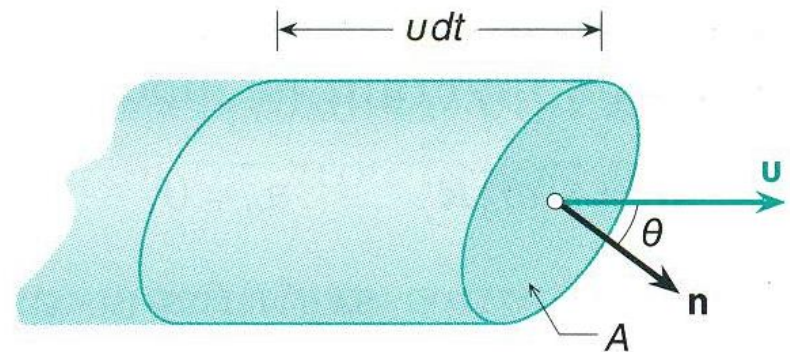
$$U = C$$

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt}$$



$$\dot{m} = \rho v A,$$

όταν $\mathbf{n} // \mathbf{v}$

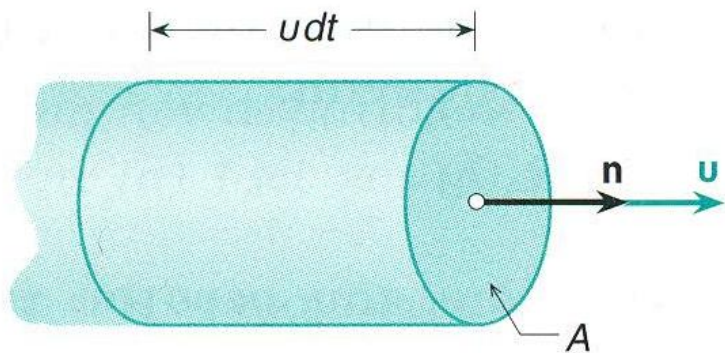


$$\dot{m} = \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) A = \rho v_n A,$$

όταν $(\widehat{\mathbf{n}}, \mathbf{v}) = \theta$

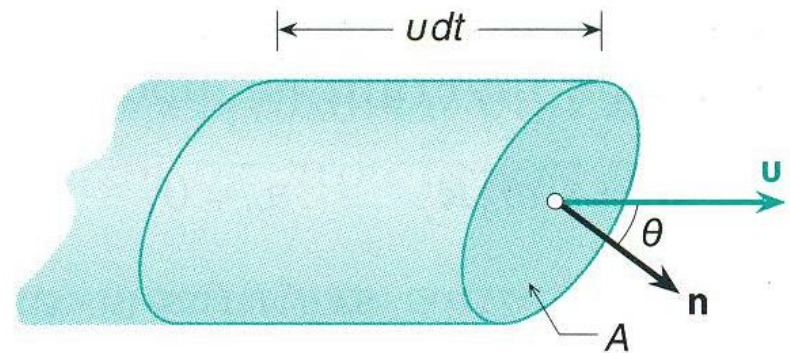
Ροή μάζας και όγκου Ομοιόμορφη u

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt}$$



$$\dot{m} = \rho v A,$$

όταν $\mathbf{n} // \mathbf{v}$



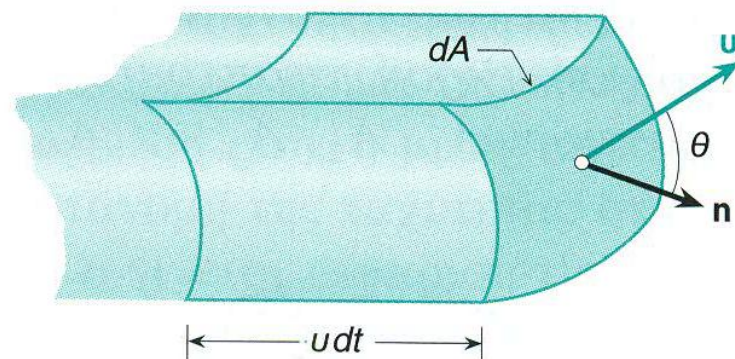
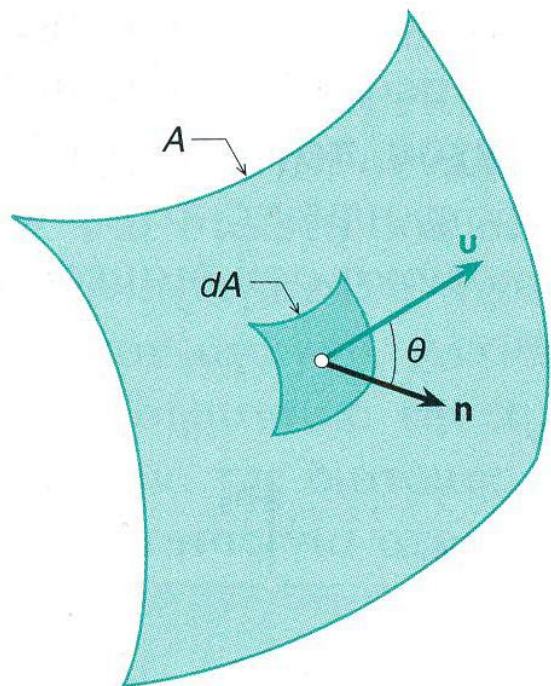
$$\dot{m} = \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) A = \rho v_n A,$$

όταν $(\widehat{\mathbf{n}}, \mathbf{v}) = \theta$

Ροή μάζας και όγκου

Ανομοιομόρφη u

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt}$$

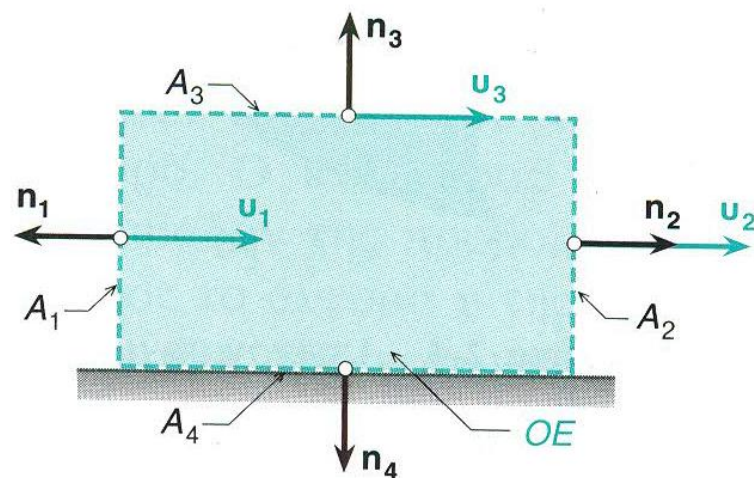
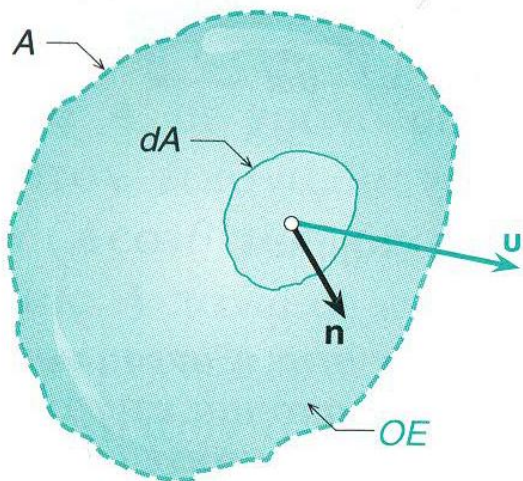


$$\dot{m} = \iint_A \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA =$$

Ποσότητα του ρευστού που
διέρχεται από την επιφάνεια
 A στη μονάδα του χρόνου

Ροή μάζας σε κλειστό όγκο ελέγχου

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt}$$



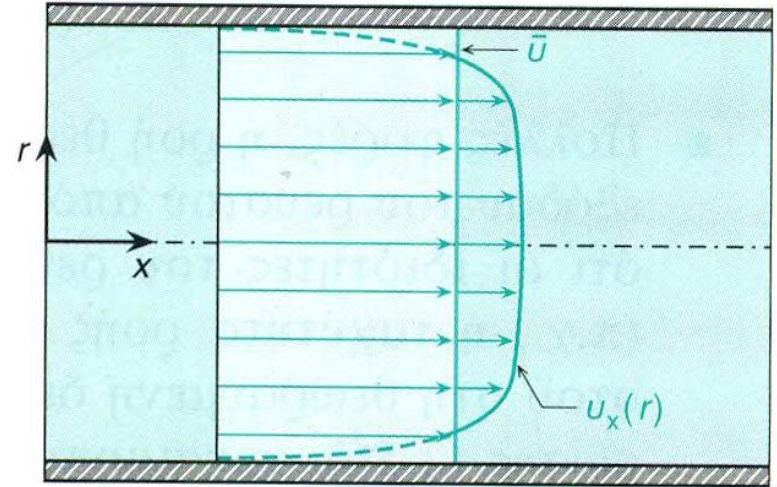
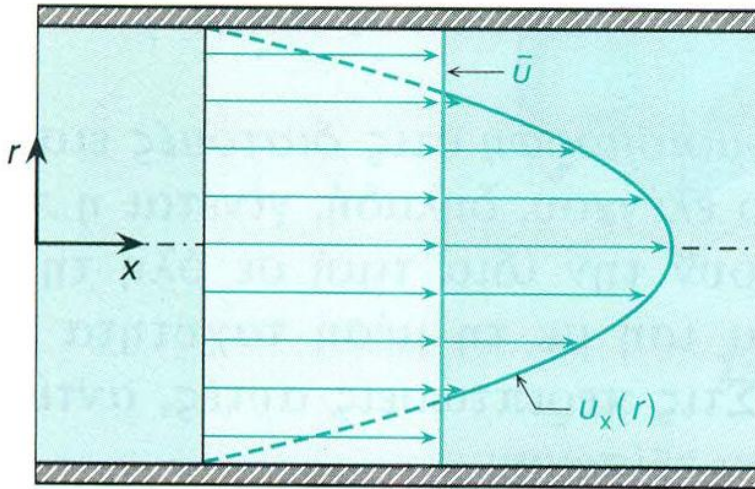
$$\dot{m} = \oint_A \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής μάζας του} \\ \text{ρευστού από έναν όγκο ελέγχου} \\ \text{διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου} \end{array} \right\}$$

Ροή όγκου
(ασυμπίεστο ρευστό)

$$\dot{m} = \rho \dot{V}$$

$$\dot{V} = \iint_A (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{Όγκος του ρευστού που} \\ \text{διέρχεται από την επιφάνεια} \\ A \text{ στη μονάδα του χρόνου} \end{array} \right\}$$

Μέση ταχύτητα



$$\bar{v} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{A} \iint_A (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

- Ποια είναι στρωτή και ποια τυρβώδης ροή;
- Ποια ροή προσεγγίζει καλύτερα την ομοιόμορφη ροή;

Για μια τυχαία εκτατική ιδιότητα B :

$$\dot{B} = \iint_A b \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ποσότητα } B \text{ του ρευστού που} \\ \text{διέρχεται από την επιφάνεια} \\ A \text{ στη μονάδα του χρόνου} \end{array} \right\}$$

$$B = \int_m b dm = \iiint_V b \rho dV$$

Η ποσότητα b είναι η εκτατική ιδιότητα ανηγμένη στη μονάδα μάζας.
(εντατική ιδιότητα)

Για κλειστό όγκο ελέγχου :

$$\dot{B} = \oiint_{EE} b\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής της ποσότη-} \\ \text{τας } B \text{ του ρευστού από έναν όγκο ελέγ-} \\ \text{χου διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου} \end{array} \right\}$$

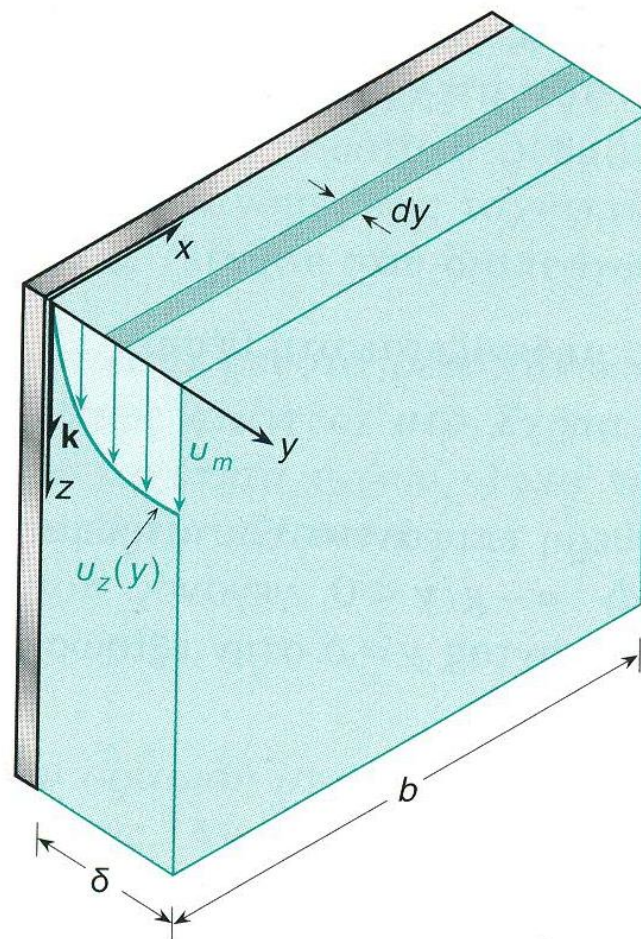
Για ομοιόμορφη ροή:

$$\dot{B} = \sum_{EE} b\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) A$$

Για μόνιμη στρωτή ροή, ποια είναι η σχέση μέσης και μέγιστης ταχύτητας?

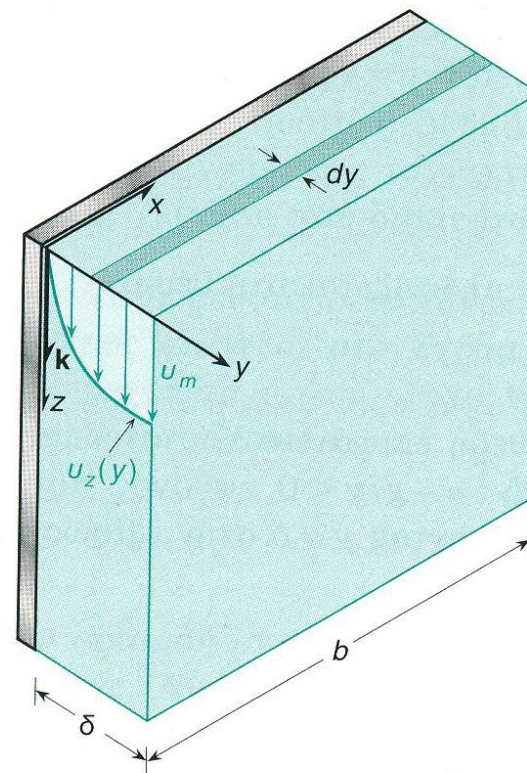
Κατανομή u ως προς y :

$$\mathbf{v} = \frac{g\delta^2}{\nu} \left[\left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \mathbf{k}$$



Για μόνιμη στρωτή ροή, ποια είναι η σχέση μέσης και μέγιστης ταχύτητας?

$$\mathbf{v} = \frac{g\delta^2}{\nu} \left[\left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \mathbf{k}$$



$$\bar{v} = \frac{1}{A} \iint_A (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

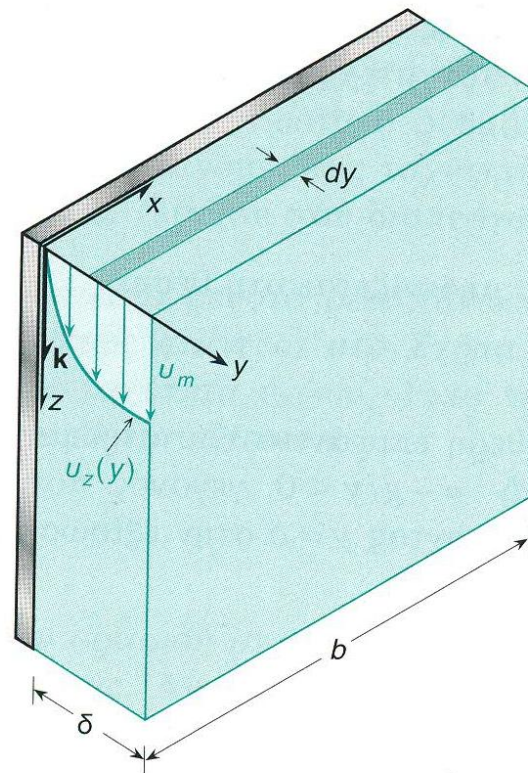
$$\bar{v} = \iint_A v_z dA = \frac{1}{b\delta} \int_0^\delta \frac{g\delta^2}{\nu} \left[\left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] b dy = \frac{g}{\delta\nu} \int_0^\delta \left(\delta y - \frac{y^2}{2} \right) dy$$

Για μόνιμη στρωτή ροή, ποια είναι η σχέση μέσης και μέγιστης ταχύτητας;

$$\bar{v} = \iint_A v_z dA = \frac{1}{b\delta} \int_0^\delta \frac{g\delta^2}{\nu} \left[\left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] b dy = \frac{g}{\delta\nu} \int_0^\delta \left(\delta y - \frac{y^2}{2} \right) dy$$

$$\bar{v} = \frac{g\delta^2}{3\nu}$$

Ποια είναι η συνθήκη για $u=\max$;



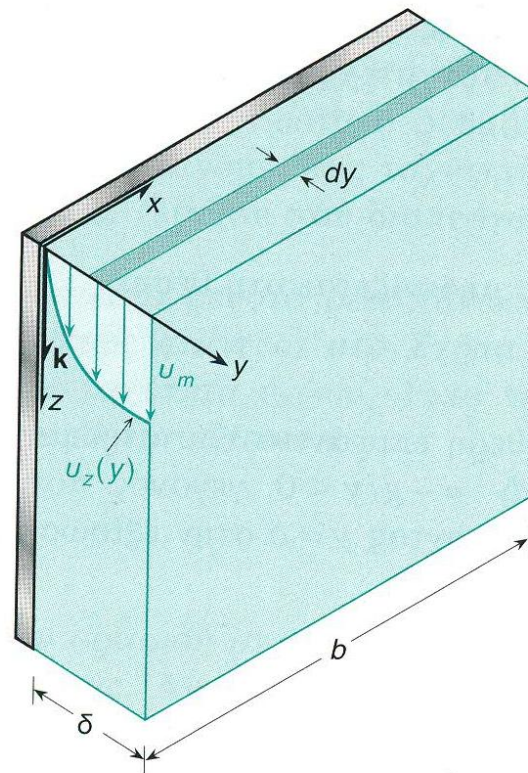
Η παράγωγος της ταχύτητας μηδενίζεται στα ακρότατα .

(Η δεύτερη παράγωγος της ταχύτητας είναι αρνητική για $u=\max$).

$$v_z = \frac{g\delta^2}{\nu} \left[\left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right]$$

$$\frac{dv_z}{dy} = \frac{g}{\nu} (\delta - y)$$

Ποια είναι η συνθήκη για $u=\max$;



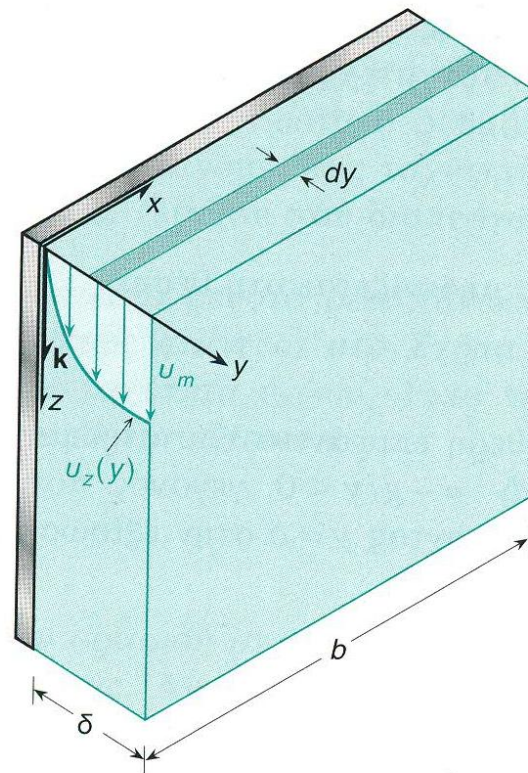
Η παράγωγος της ταχύτητας μηδενίζεται στα ακρότατα .

$$\frac{dv_z}{dy} = \frac{g}{\nu} (\delta - y)$$

$$y_m = \delta \quad v_m = \frac{g\delta^2}{2\nu}$$

$$\frac{\bar{v}}{v_m} = \frac{2}{3}$$

Ποια είναι η συνθήκη για $u=\max$;



Γραφική Παράσταση Πεδίων ροής

Η οπτικοποίηση του πεδίου είναι απαραίτητη για την κατανόηση των φαινομένων της ροής.

Είναι βασική για πειραματική και αριθμητική προσέγγιση της ροής.

Μέθοδοι

- Ροϊκές γραμμές

- Τροχιές

- Ινώδεις φλέβες

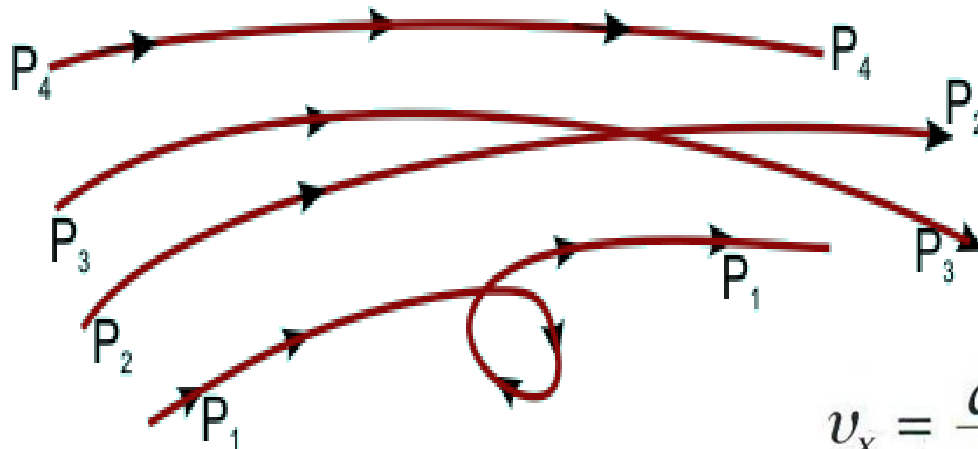
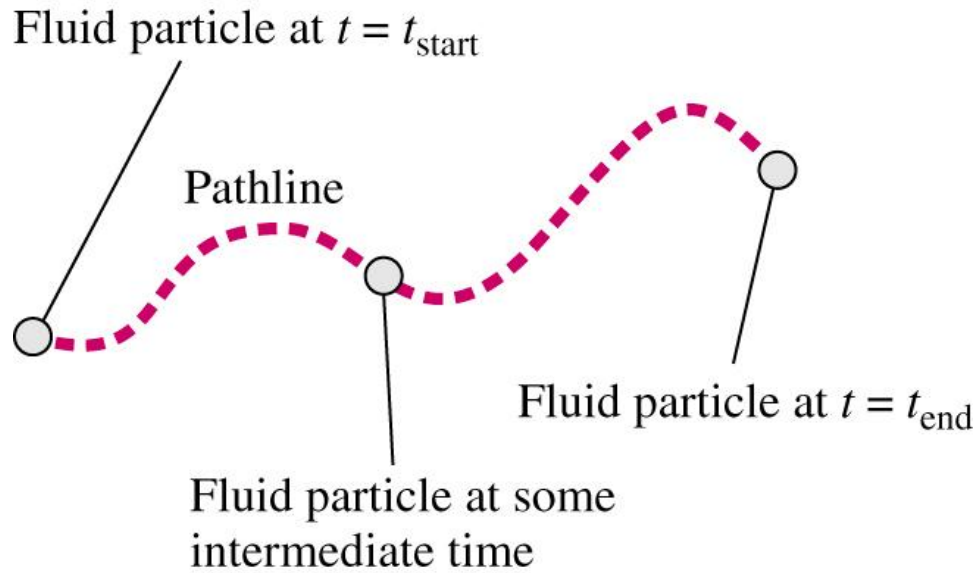
- Τεχνικές διάθλασης

- Τεχνικές επιφανειακής ροής

Η οπτικοποίηση της ροής βοηθά στην κατανόηση φαινομένων που απαιτούν περίπλοκη μαθηματική θεώρηση και συχνά δεν έχουν λύση



Τροχιές



- Η τροχιά είναι η διαδρομή που διανύει σωματίδιο του ρευστού στο χώρο για δεδομένο χρονικό διάστημα.
- Ταυτίζεται με το διάνυσμα θέσης:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t) = \mathbf{R}(X_0, Y_0, Z_0, t)$$

- Για γνωστό πεδίο ταχύτητας:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{R}_0, t) = \mathbf{v}(X_0, Y_0, Z_0, t)$$

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0}$$

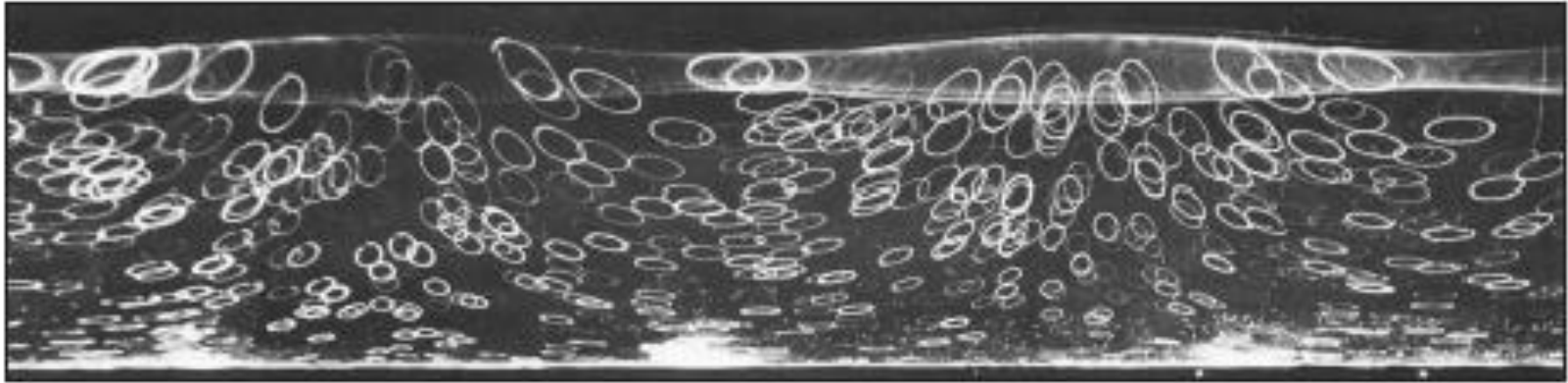
$$v_x = \frac{dX}{dt}$$

$$v_y = \frac{dY}{dt}$$

$$v_z = \frac{dZ}{dt}$$

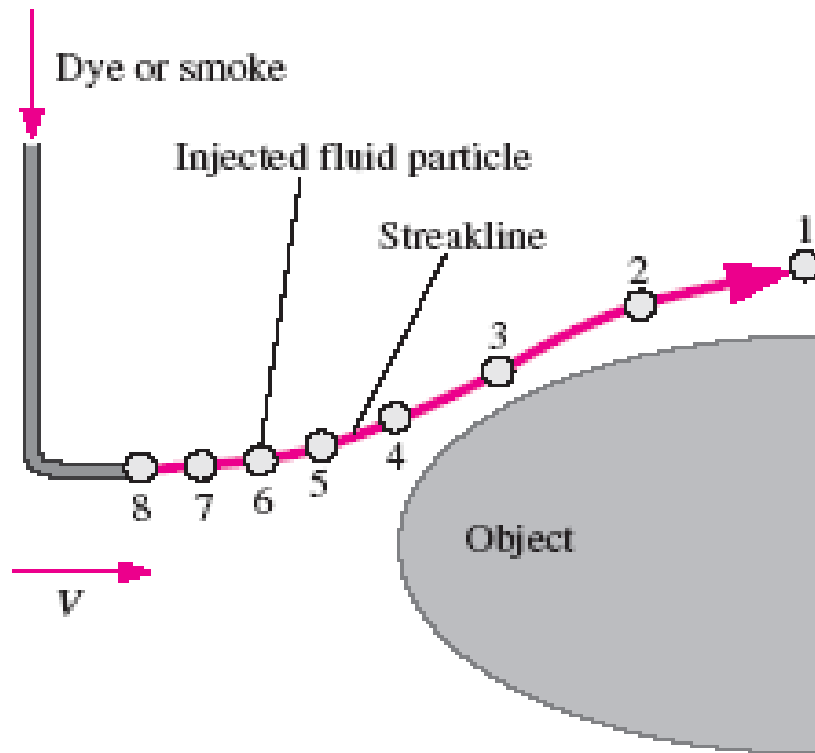
Particle Image Velocimetry (PIV) is a modern experimental technique to measure velocity field over a plane in the flow field.

Τροχιές



A modern experimental technique called [particle image velocimetry \(PIV\)](#) utilizes (tracer) particle pathlines to measure the velocity field over an entire plane in a flow (Adrian, 1991).

Ινώδεις φλέβες



Η νοητή γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται όλα τα σωματίδια που πέρασαν πριν από μία δεδομένη στιγμή από ένα σημείο του πεδίου ροής

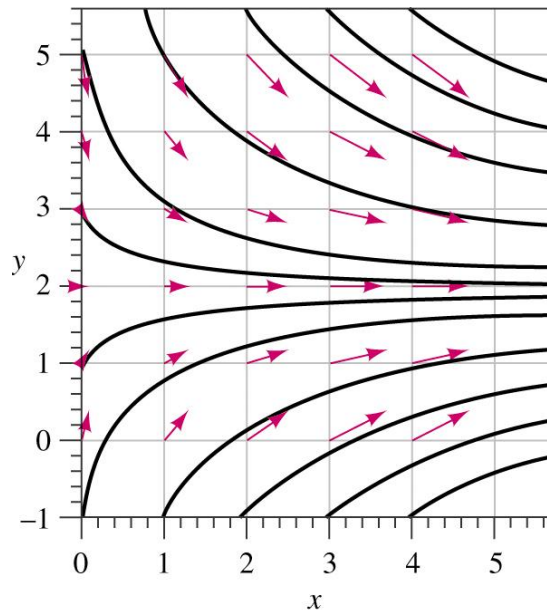
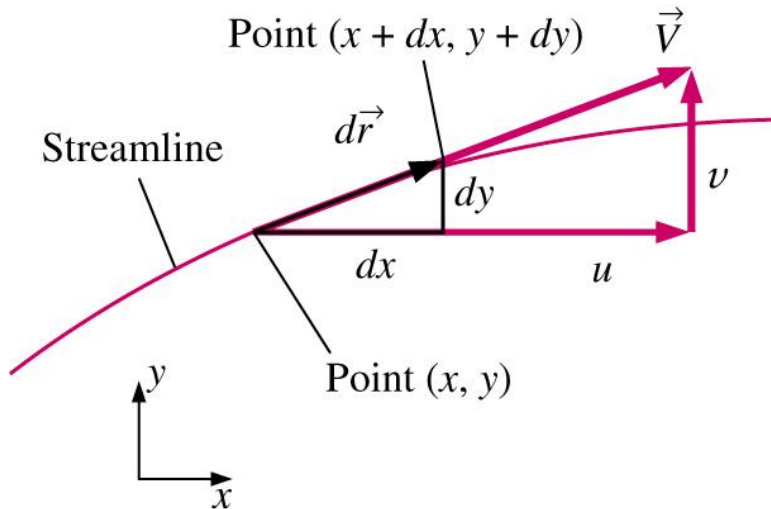
Πειραματικά υλοποιείται εύκολα (πείραμα Reynolds, καπνός μέσα σε ροϊκό πεδίο).

$$\mathbf{R} = \mathbf{R} \{ \mathbf{R}_0 [(a, b, c), \tau], t \}, \quad \text{για } 0 \leq \tau \leq t$$

Ινώδεις φλέβες

- Ενώ η τροχιά αναφέρεται σε συγκεκριμένο σωματίδιο, η ινώδης φλεβα ορίζεται με βάση συγκεκριμένα σημεία του πεδίου ροής.
- Είναι σημαντική για την οπτική αναπαράσταση της ροής.
- Π.χ.:
 - Εάν εισάγουμε χρώμα σε συγκεκριμένο σημείο της ροής, μετά από χρονικό διάστημα τ , το χρώμα θα δείχνει το τελικό σημείο της τροχιάς των σωματιδίων που πέρασαν από το σημείο έγχυσης.
 - Τα ίδιο συμβαίνει και για τον καπνό που βγαίνει από την καμινάδα ή το τσιγάρο

Ροϊκές γραμμές



- Είναι η καμπύλη στην οποία εφάπτεται το διάνυσμα της ταχύτητας.
- Για τυχαίο μήκος τόξου:

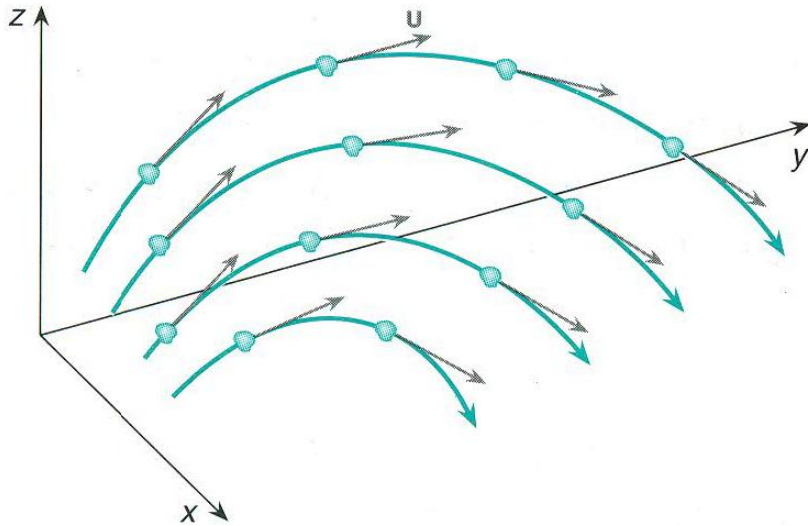
$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$d\vec{r}$ πρέπει να είναι παράλληλο στο διάνυσμα της ταχύτητας

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

- Μηδενίζοντας το εξωτερικό γινόμενο της ταχύτητας με το διάνυσμα $d\vec{r}$ παίρνω τη διαφορική εξίσωση της ροϊκής γραμμής

Ροϊκές γραμμές

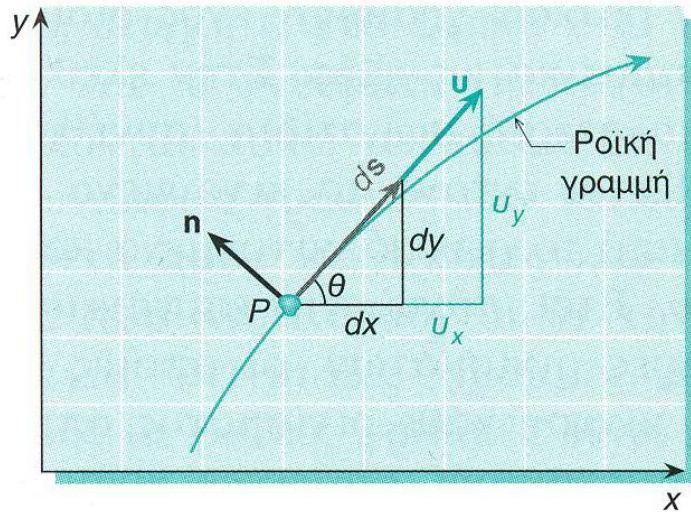


Για καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{s} = \mathbf{0}$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Ροϊκές γραμμές 2D ροή



$$\mathbf{v} \times d\mathbf{s} = \mathbf{0}$$

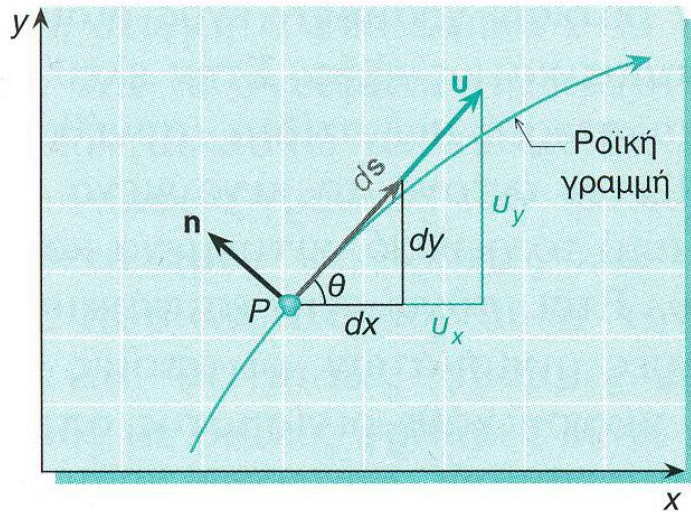
Για καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

Για κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\theta}{v_\theta}$$

Ροϊκές γραμμές 2D ροή



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Τοπική κλίση ροϊ-} \\ \text{κής γραμμής } y(x) \end{array} \right\} = \tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x}$$

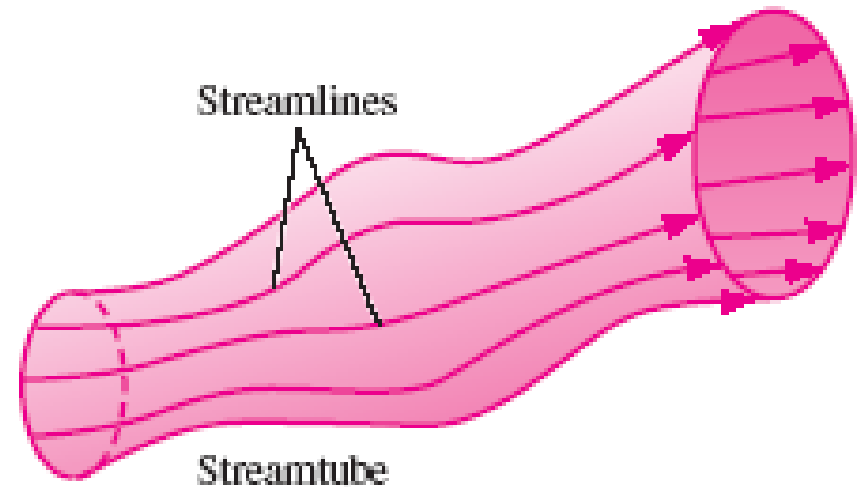
$$\mathbf{v} \times d\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$$

Η ροϊκές γραμμές δεν τέμνονται ποτέ για μη μηδενικές ταχύτητες ροής γιατί το διάνυσμα της ταχύτητας θα έπρεπε να είναι εφαπτόμενο σε περισσότερες από μια γραμμές.

Τι συμβαίνει όταν η ταχύτητα είναι μηδέν (σημεία ηρεμίας)?

Ροϊκός σωλήνας

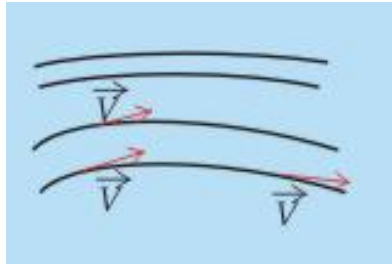
- Αποτελείται από ένα σύνολο ροϊκών γραμμών για δεδομένη χρονική στιγμή.
- Σύμφωνα με το ορισμό της ροϊκής γραμμής, το ρευστό παραμένει στο ροϊκό σωλήνα και δεν δύναται να διαβεί τη νοητή επιφάνεια.
- Σε μη μόνιμες ροές η μορφή του ροϊκού σωλήνα αλλάζει σε κάθε χρονική στιγμή.
- Η ροή μάζας δια μέσω κάθε διατομής του σωλήνα πρέπει να είναι σταθερή.
- Ο ροϊκός σωλήνας απειροστών διαστάσεων ονομάζεται ροϊκό νήμα
- Η συνθήκη που πρέπει να πληροί η επιφάνειά του είναι $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$



Ο Ροϊκός σωλήνας

- ◇ Έχει πεπερασμένες διαστάσεις
- ◇ Δεν υπάρχει ροή δια μέσω της επιφάνειάς του
- ◇ Το σχήμα δεν είναι σταθερό για μη μόνιμες ροές

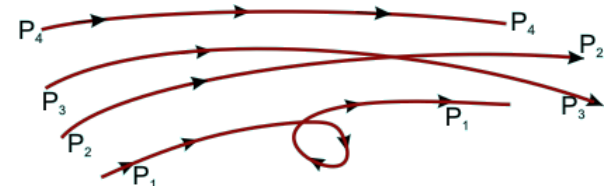
Ροϊκή γραμμή



Είναι μια υποθετική καμπύλη του πεδίου ροής που για δεδομένη στιγμή η ταχύτητα εφάπτεται σε αυτή .

Δύο ροϊκές γραμμές δεν τέμνονται ποτέ εκτός εάν υπάρχει σημείο ηρεμίας.

Τροχιά



Είναι η πορεία που διαγράφει σωματίδιο σε ένα χρονικό διάστημα.

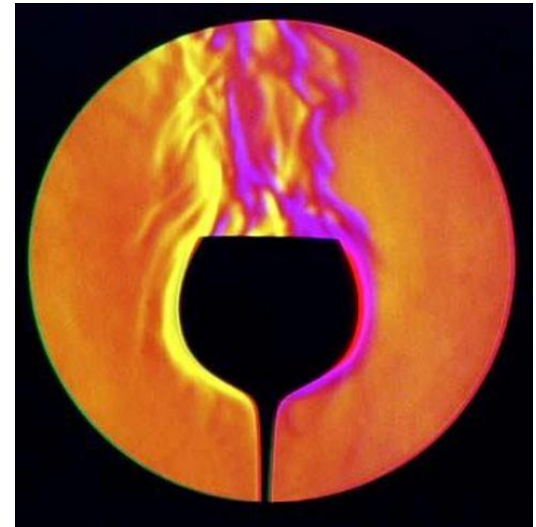
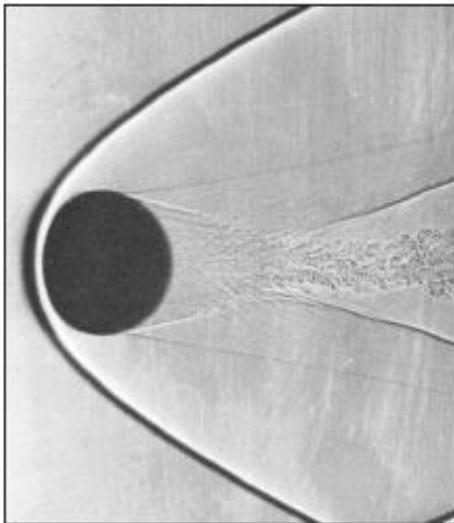
Δύο τροχιές είναι δυνατόν να διασταυρωθούν ή μία τροχιά να διαγράψει κλειστό βρόγχο, αφού ένα ή περισσότερα σωματίδια μπορεί να περάσουν από το ίδιο σημείο στο χώρο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Συγκρίσεις

- Για μόνιμες ροές οι ροϊκές γραμμές , οι τροχιές και οι ινώδεις φλέβες ταυτίζονται.
- Για μη μόνιμες ροές:
 - οι ροϊκές γραμμές αποτελούν τη στιγμιαία απεικόνιση του πεδίου
 - οι τροχιές και οι ινώδεις φλέβες διαγράφονται στη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου.
 - Ινώδης φλέβα: απεικόνιση της ροής σε ένα χρονικό διάστημα.
 - Τροχιά: Η πορεία του σωματιδίου για ένα χρονικό διάστημα.

Τεχνικές περίθλασης

- Based on the refractive property of light waves in fluids with different index of refraction, one can visualize the flow field: *shadowgraph technique and schlieren technique.*



Shadowgraph

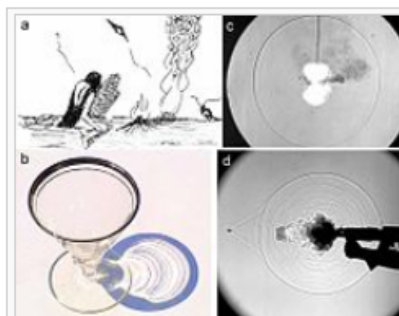
From Wikipedia, the free encyclopedia

For other uses, see [Shadowgraphy \(disambiguation\)](#).

Shadowgraph is an optical method that reveals non-uniformities in [transparent](#) media like air, water, or glass. It is related to, but simpler than, the [schlieren](#) and [schlieren photography](#) methods that perform a similar function.

Shadowgraph is a type of [flow visualisation](#).

In principle, we cannot directly see a difference in temperature, a different gas, or a [shock wave](#) in the transparent air. However, all these disturbances [refract](#) light rays, so they can cast [shadows](#). The plume of hot air rising from a [fire](#), for example, can be seen by way of its shadow cast  [rays: ακτίνες](#) [Απελευθέρωση](#) from [sunlight](#).



a) prehistoric shadowgraphy, b) sunlight shadowgram of a martini glass, c) "focused" shadowgram of a common firecracker explosion, d) "Edgerton" shadowgram of the firing of an [AK-47 assault rifle](#) (images and artwork by Gary S. Settles, Penn State Gas Dynamics Lab)

Contents [\[hide\]](#)

- 1 [Sunlight shadowgraph](#)
- 2 [Applications](#)
 - 2.1 [Shadowgram](#)
 - 2.2 [Cartoons](#)
 - 2.3 [Postcards](#)
- 3 [See also](#)
- 4 [References](#)
- 5 [External links](#)

Schlieren

From Wikipedia, the free encyclopedia

For the town, see [Schlieren, Switzerland](#).

Schlieren (from [German](#); singular "Schliere", meaning "streak") are optical inhomogeneities in transparent material not visible to the human eye. Schlieren physics developed out of the need to produce high-quality lenses devoid of these inhomogeneities. These inhomogeneities are localized differences in optical path length that cause light deviation. This light deviation can produce localized brightening, darkening, or even color changes in a image, depending on which way the ray deviates.

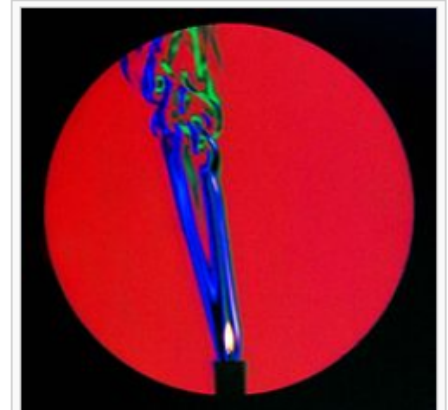
Contents [\[hide\]](#)

- [1 History](#)
- [2 Schlieren flow visualization](#)
- [3 Schlieren displays](#)
- [4 See also](#)
- [5 References](#)
- [6 External links](#)

History

[\[edit\]](#)

Schlieren were first observed by [Robert Hooke](#)^[1] in 1665 using a large [convex lens](#) and two candles. One candle served as a light source. The warm air rising from the second candle provided the schliere. The conventional schlieren system is credited mostly to [German](#) physicist [August Toepler](#). Toepler's original system ^[2] was designed to detect schlieren in [glass](#) used to make lenses. In the conventional schlieren system ^[3], a [point source](#)



Color schlieren image of the thermal plume from a burning candle, disturbed by a breeze from the right. Photographed by Gary S. Settles, Penn State University [\[4\]](#)

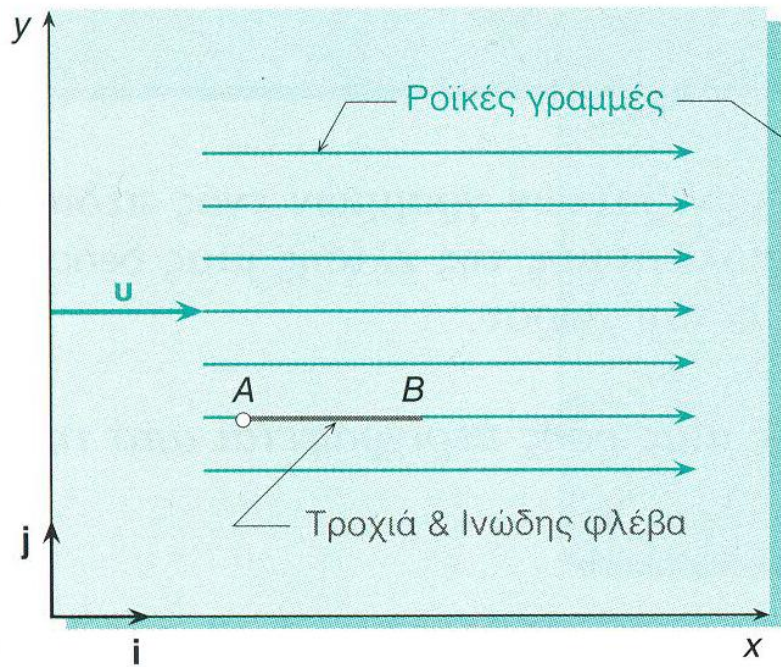
Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής

$$\mathbf{v} = 0,3\mathbf{i} \quad (\text{m/s}) \quad 0 \leq t \leq 4 \text{ s}$$

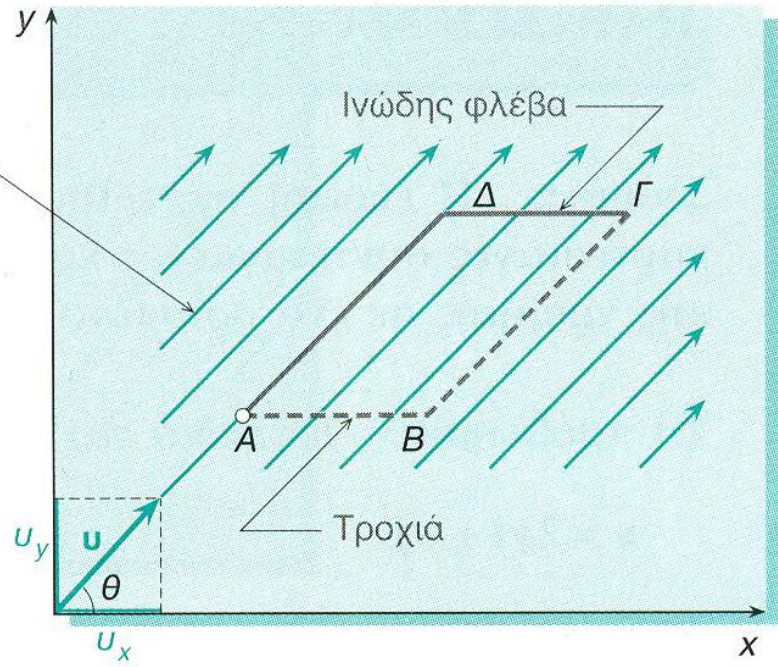
$$\mathbf{v} = 0,2\mathbf{i} + 0,2\mathbf{j} \quad 4 < t \leq 10 \text{ s}$$

για το χρονικό διάστημα $4 < t \leq 10 \text{ sec}$. Να χαραχθούν:

- α. Οι ροϊκές γραμμές του πεδίου ροής τις στιγμές $t_1 = 4 \text{ sec}$ και $t_2 = 10 \text{ sec}$.
- β. Η τροχιά του σωματιδίου το οποίο περνάει από το σημείο $A(x_0, y_0)$ του χώρου τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ sec}$ για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 10 \text{ sec}$.
- γ. Η ινώδης φλέβα των σωματιδίων του ρευστού τα οποία πέρασαν από το σημείο A στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 10 \text{ sec}$.

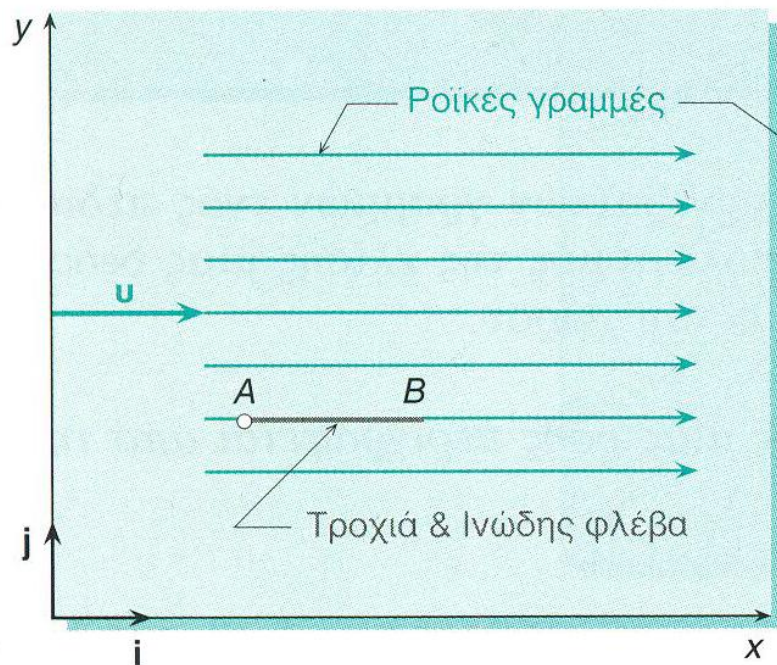


(α)

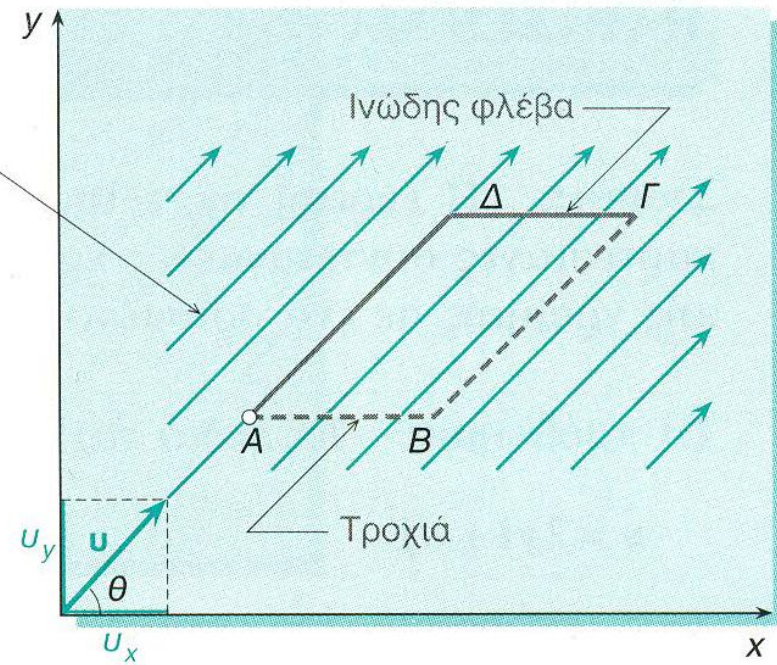


(β)

Ποιο είναι το μήκος της τροχιάς?



(α)



(β)

$$(AB) = |\mathbf{v}| \Delta t = (0,3 \text{ m/s}) (4 - 0) \text{ s} = 1,2 \text{ m}$$

$$(B\Gamma) = |\mathbf{v}| \Delta t = \left[\sqrt{(0,2)^2 + (0,2)^2} \text{ m/s} \right] (10 - 4) \text{ s} = 1,7 \text{ m}$$

Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{v} = 2y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

- α. Να ευρεθεί η γενική εξίσωση των ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής.
- β. Να σχεδιαστεί ένας αριθμός ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου xy .
- γ. Η εξίσωση της ροϊκής γραμμής η οποία διέρχεται από το σημείο $(3, 1)$ του πεδίου και η κλίση της στο σημείο αυτό.

α. Να ευρεθεί η γενική εξίσωση των ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής.

$$\mathbf{v} = 2y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

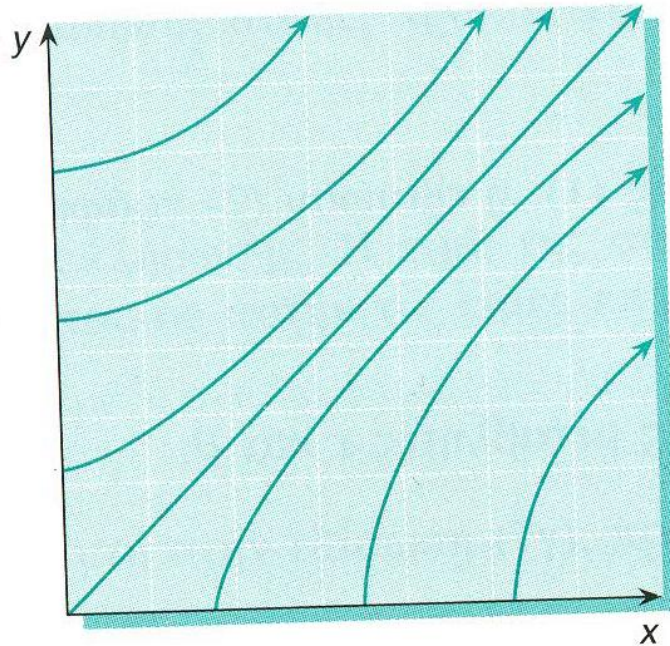
$$x dx = 2y dy$$

$$x^2 = 2y^2 + c$$

β. Να σχεδιαστεί ένας αριθμός ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου xy .

$$x^2 = 2y^2 + c \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

όπου $a = c^{1/2}$ και $b = (0,5c)^{1/2}$



γ. Η εξίσωση της ροϊκής γραμμής η οποία διέρχεται από το σημείο $(3, 1)$ του πεδίου και η κλίση της στο σημείο αυτό.

$$x^2 = 2y^2 + c \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2y^2 + 7$$

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{x}{2y} = \frac{3}{2} \quad \text{ή} \quad \theta = 56,3^\circ$$

Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής

$$\mathbf{v} = xe^{-t}\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \text{για } t \geq 0$$

- α. Η γενική εξίσωση των ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής.
- β. Να σχεδιαστούν μερικές ροϊκές γραμμές οι οποίες να διέρχονται από το σημείο (a, b) του πρώτου τεταρτημορίου του επιπέδου xy .
- γ. Η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου του ρευστού το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ sec}$ βρισκόταν στο σημείο (x_0, y_0) του χώρου.

α. Η γενική εξίσωση των ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής.

$$\mathbf{v} = xe^{-t}\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \text{για } t \geq 0$$

$$\frac{dX}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

$$\frac{dy}{y} = e^t \frac{dX}{X}$$

$$y = cX^{e^t}$$

Για δεδομένη χρονική στιγμή t

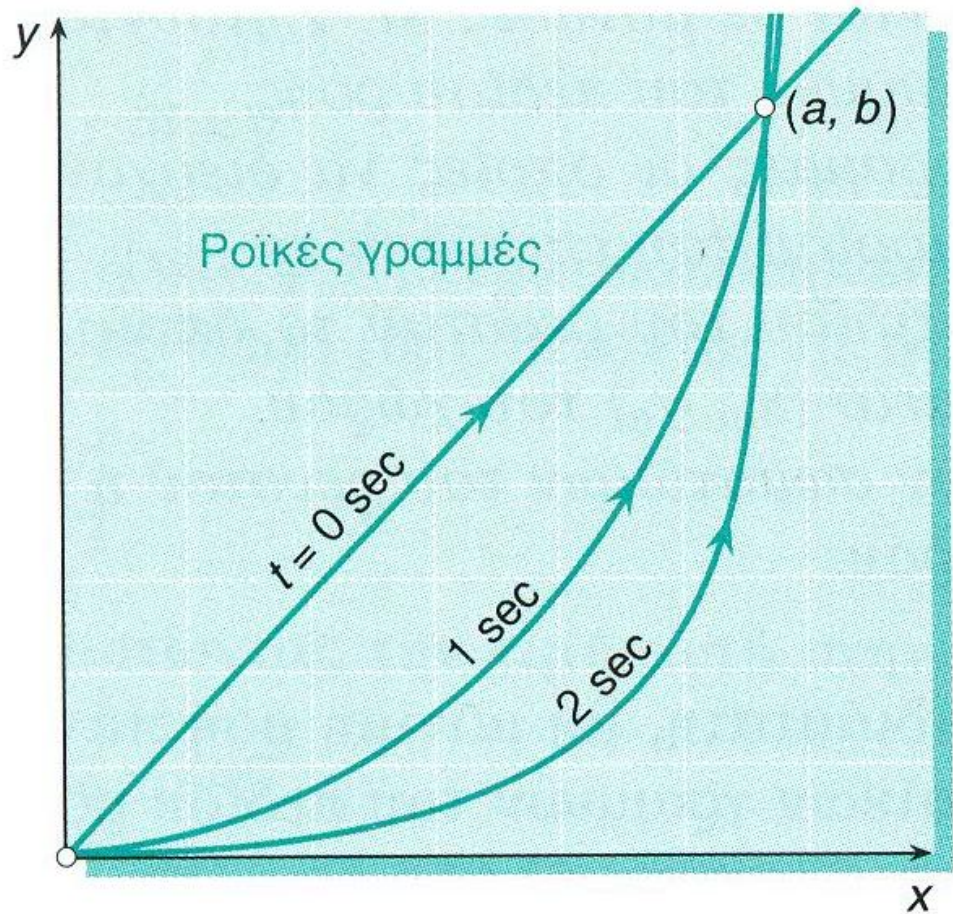
Να σχεδιαστούν μερικές ροϊκές γραμμές οι οποίες να διέρχονται από το σημείο (a, b) του πρώτου τεταρτημορίου του επιπέδου xy .

$$y = cX^{e^t}$$

$$c = ba^{-e^t}$$



$$y = b\left(\frac{X}{a}\right)^{e^t}$$



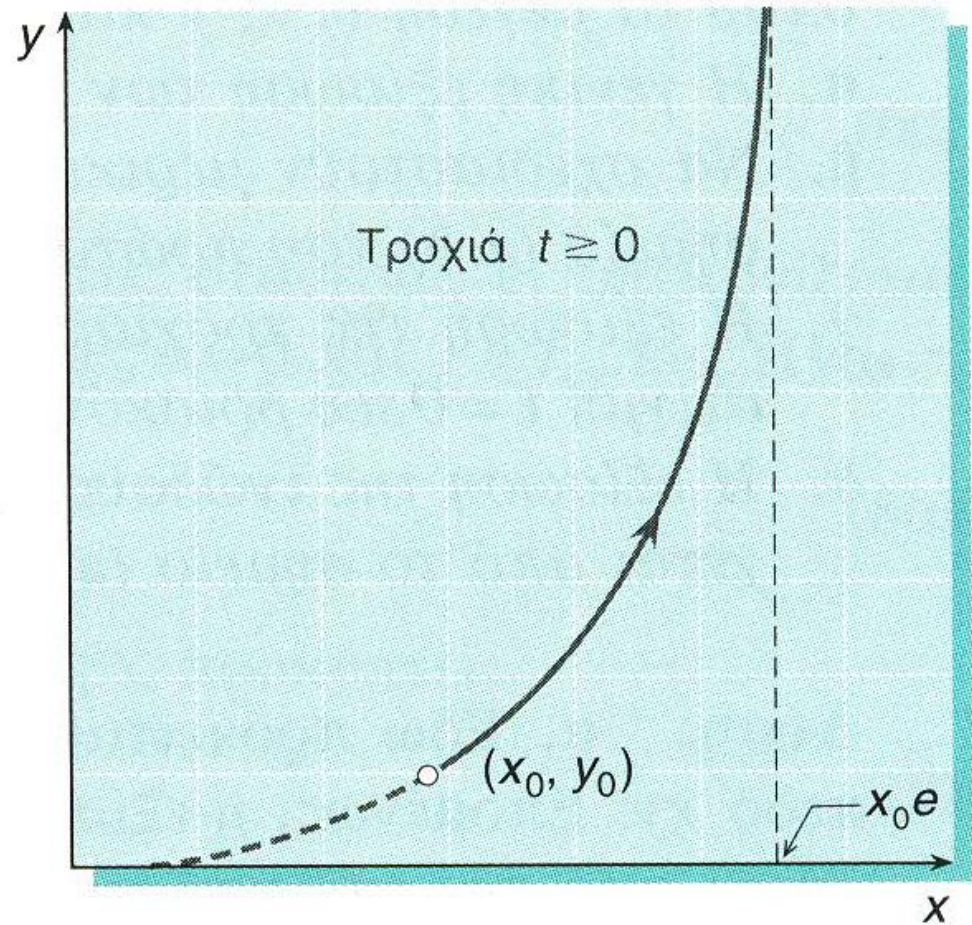
Η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου του ρευστού το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ sec}$ βρισκόταν στο σημείο (x_0, y_0) του χώρου.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = xe^{-t} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = y$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{dX}{X} &= \int_0^t e^{-t} dt & \text{ή} & \quad X = x_0 e^{1-e^{-t}} \\ \int_{y_0}^y \frac{dy}{y} &= \int_0^t dt & \text{ή} & \quad y = y_0 e^t \end{aligned} \right\} y = \frac{y_0}{1 - \ln(x/x_0)}$$

Η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου του ρευστού το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ sec}$ βρισκόταν στο σημείο (x_0, y_0) του χώρου.

$$y = \frac{y_0}{1 - \ln(x/x_0)}$$



Η ροϊκή συνάρτηση

- Έστω συνεχής συνάρτηση για 2D ασυμπίεστη ροή (καρτεσιανές συντεταγμένες):

$$\psi = \psi(x, y, t)$$

- Όστε:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Η ροϊκή συνάρτηση

- Έστω συνεχής συνάρτηση για 2D ασυμπίεστη ροή (κυλινδρικές συντεταγμένες):

$$\psi = \psi(r, \theta, t)$$

- Όστε:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad v_\theta = - \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Η ροϊκή συνάρτηση

- Γιατί?
 - Μία συνάρτηση ψ απεικονίζει το πεδίο. Για γνωστό ψ υπολογίζονται οι συνιστώσες της ταχύτητας.
 - Φυσική σημασία
 - Οι καμπύλες σταθερού ψ είναι οι ροϊκές γραμμές
 - Οι διαφορές της ψ μεταξύ ροϊκών γραμμών ισούνται με τη ροή όγκου μεταξύ τους
 - Μπορεί να οριστεί ως η ροή μεταξύ δύο ροϊκών γραμμών.
 - Οι μονάδες της σε SI είναι m^2/s .

Η ροϊκή συνάρτηση: γεωμετρική ερμηνεία

- Για δεδομένο t_0 , η ροϊκή συνάρτηση είναι

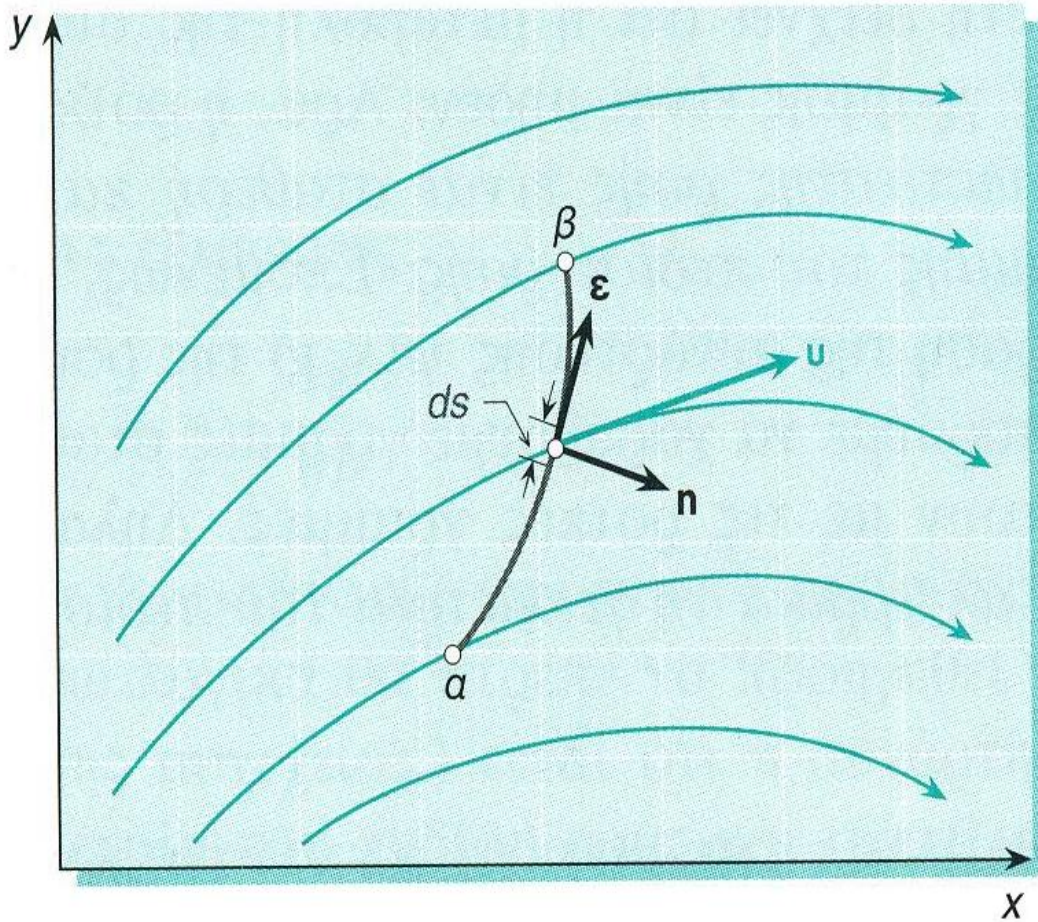
$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi(x, y, t_0) \\ d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \\ v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} d\psi = v_x dy - v_y dx$$

Η ροϊκή συνάρτηση: γεωμετρική ερμηνεία

- Η εξίσωση των ροϊκών γραμμών είναι:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} &\Leftrightarrow v_x dy - v_y dx = 0 \\ d\psi = v_x dy - v_y dx \end{aligned} \right\} d\psi = 0$$

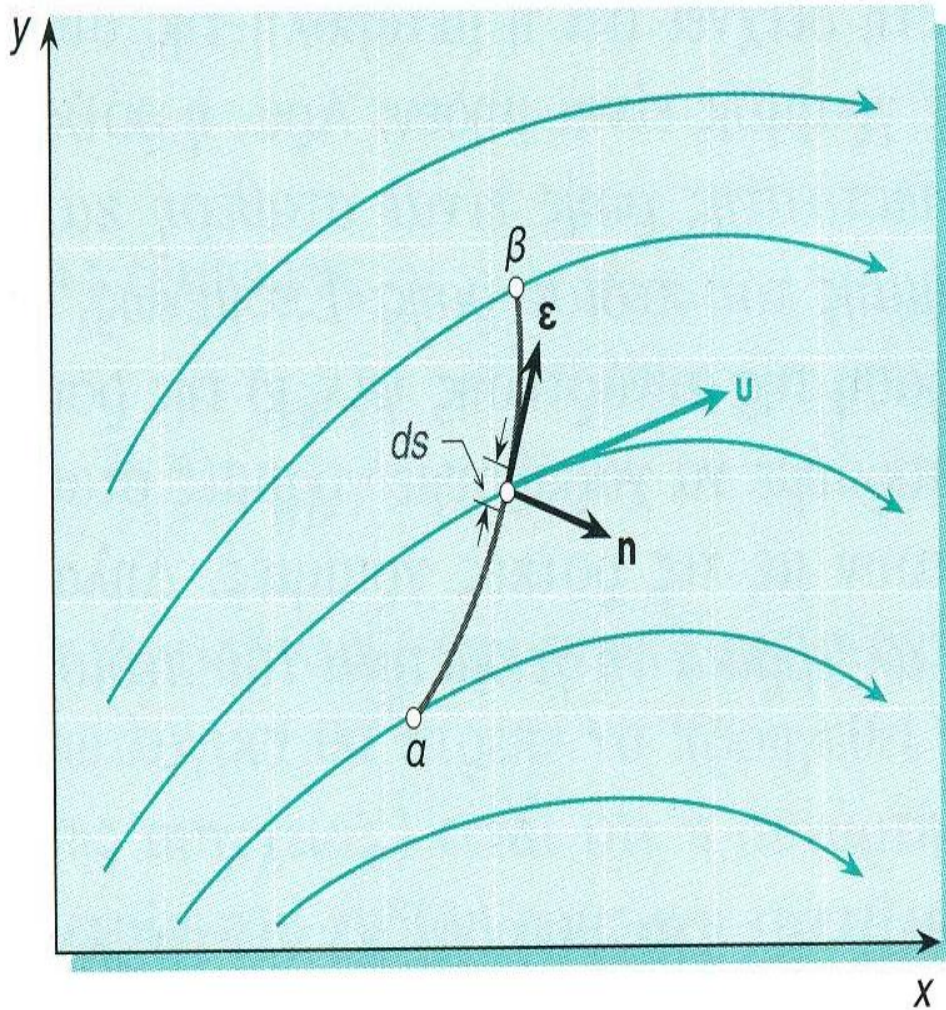
Η ροϊκή συνάρτηση: φυσική ερμηνεία



Ανά μονάδα βάθους
η παροχή δια της
προσανατολισμένης
καμπύλης AB, είναι:

$$\dot{V}' = \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds$$

Η ροϊκή συνάρτηση: φυσική ερμηνεία



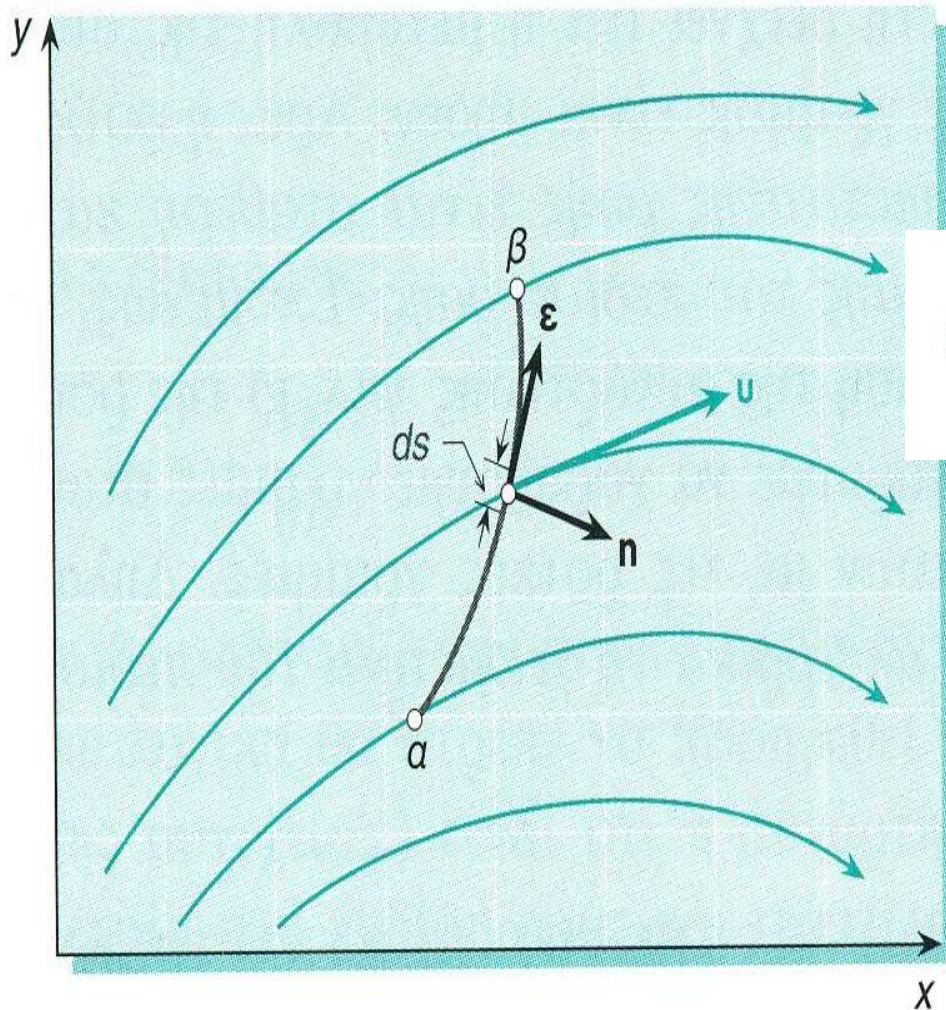
Για τις συνιστώσες της ταχύτητας στις διευθύνσεις x και y :

$$\dot{V}' = \int_{\alpha}^{\beta} (n_x v_x + n_y v_y) ds$$

Από τον ορισμό της ροϊκής συνάρτησης:

$$\dot{V}' = \int_{\alpha}^{\beta} \left(n_x \frac{\partial \psi}{\partial y} - n_y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) ds$$

Η ροϊκή συνάρτηση: φυσική ερμηνεία



Το διάνυσμα ds σχετίζεται με τα μοναδιαία διανύσματα στις x και y :

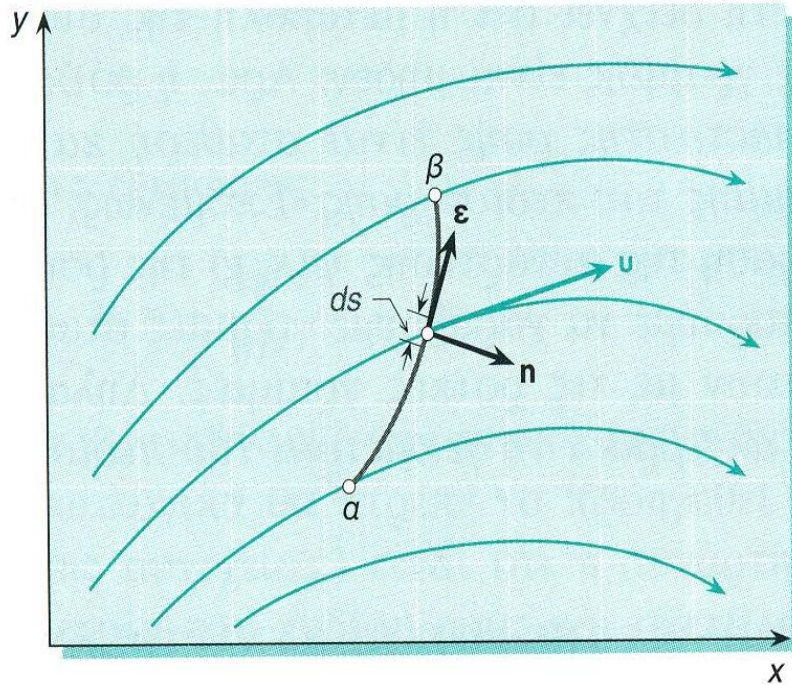
$$n_x = -\frac{dy}{ds} \quad \text{και} \quad n_y = \frac{dx}{ds}$$

Από τον ορισμό της ροϊκής συνάρτησης:

$$\dot{V}' = \int_{\alpha}^{\beta} \left(n_x \frac{\partial \psi}{\partial y} - n_y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) ds$$

$$\dot{V}' = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right)$$

Η ροϊκή συνάρτηση: φυσική ερμηνεία



$$\dot{V}' = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right)$$

$$\dot{V}' = \int_{\alpha}^{\beta} d\psi = \psi_{\beta} - \psi_{\alpha}$$

$$\psi_{\beta} - \psi_{\alpha} = \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds = \left\{ \begin{array}{l} \text{Όγκος του ρευστού ανά μονάδα} \\ \text{βάθους που διέρχεται από τη} \\ \text{γραμμή } \alpha\beta \text{ στη μονάδα του χρόνου} \end{array} \right\}$$

Για ροϊκή συνάρτηση:

$$\psi = -2ax - 3by$$

όπου $a = 3 \text{ m/s}$, $b = 2 \text{ m/s}$

Να χαραχθούν οι ροϊκές γραμμές που αντιστοιχούν στις τιμές της ροϊκής συνάρτησης $\psi_1 = 0 \text{ m}^2/\text{s}$ και $\psi_2 = 12 \text{ m}^2/\text{s}$.

Πάνω στο προηγούμενο διάγραμμα, να χαραχθεί το άνυσμα $\mathbf{u}$ της ταχύτητας του ρευστού στο σημείο $(x, y) = (0, 0)$.

Να υπολογιστεί η ογκομετρική παροχή του ρευστού μεταξύ των ροϊκών γραμμών που διέρχονται από τα σημεία $\alpha(1, 1)$ και $\beta(2, 2)$.

Να χαραχθούν οι ροϊκές γραμμές που αντιστοιχούν στις τιμές της ροϊκής συνάρτησης $\psi_1 = 0 \text{ m}^2/\text{s}$ και $\psi_2 = 12 \text{ m}^2/\text{s}$.

$$\left. \begin{array}{l} \psi = -2ax - 3by \\ \psi_1 = 0 \text{ m}^2/\text{s} \end{array} \right\} y = -\left(\frac{2a}{3b}\right)x$$

$$a = 3 \text{ m/s και } b = 2 \text{ m/s}$$

$$y = -x$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi = -2ax - 3by \\ \psi_2 = 12 \text{ m}^2/\text{s} \end{array} \right\} y = -\left(\frac{2a}{3b}\right)x - \frac{4}{b}$$

$$a = 3 \text{ m/s και } b = 2 \text{ m/s}$$

$$y = -x - 2$$

Πάνω στο προηγούμενο διάγραμμα, να χαραχθεί το άνυσμα $\mathbf{v}$ της ταχύτητας του ρευστού στο σημείο $(x, y) = (0, 0)$.

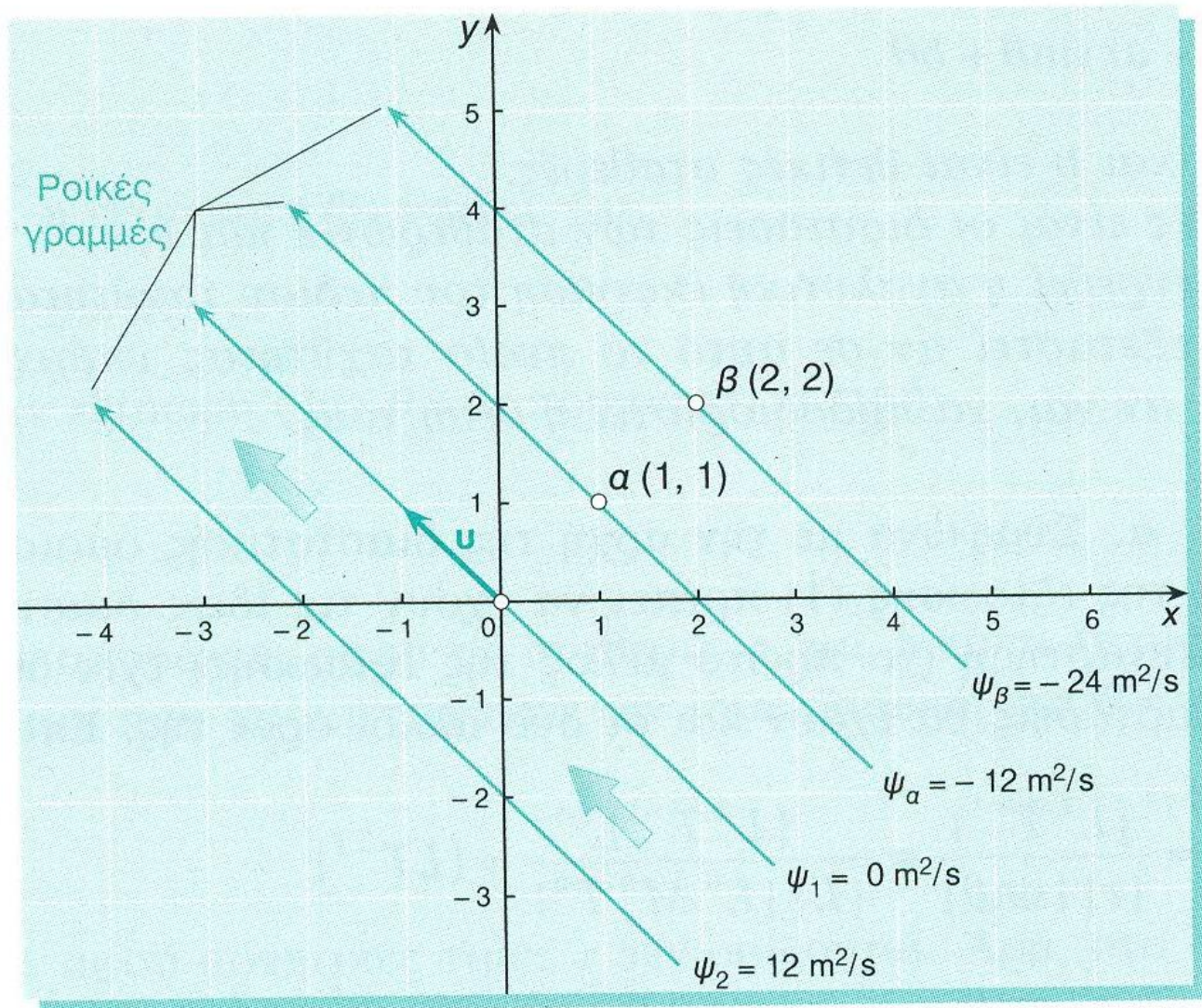
$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-2ax - 3by) = -3b = -6 \text{ m/s}$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (-2ax - 3by) = 2a = 6 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v} = -6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-6)^2 + (6)^2} \text{ m/s} = 8,48 \text{ m/s}$$

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{6 \text{ m/s}}{-6 \text{ m/s}} = -1 \quad \text{ή} \quad \theta = 135^\circ$$



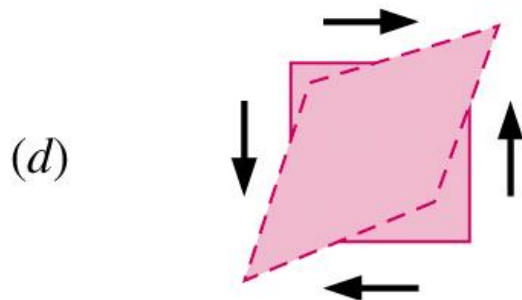
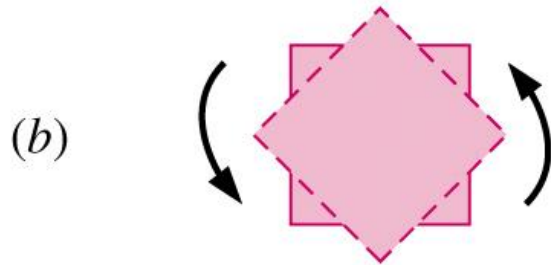
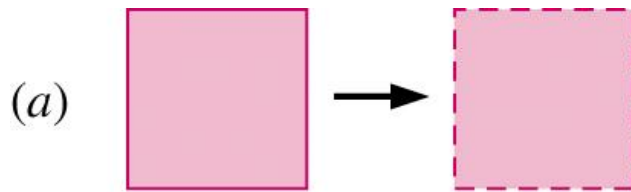
Να υπολογιστεί η ογκομετρική παροχή του ρευστού μεταξύ των ροϊκών γραμμών που διέρχονται από τα σημεία $\alpha(1,1)$ και $\beta(2,2)$.

$$\psi_{\alpha} = \psi|_{(1,1)} = [-2ax - 3by]_{(1,1)} = [-2(3)(1) - 3(2)(1)] \text{ m}^2/\text{s} = -12 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\psi_{\beta} = \psi|_{(2,2)} = [-2ax - 3by]_{(2,2)} = [-2(3)(2) - 3(2)(2)] \text{ m}^2/\text{s} = -24 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\dot{V}' = \psi_{\alpha} - \psi_{\beta} = [(-12) - (-24)] \text{ m}^2/\text{s} = 12 \text{ m}^2/\text{s}$$

Κινηματική



- Τέσσερα στοιχειώδη είδη κίνησης.
 - μεταφορά
 - περιστροφή
 - Γραμμική παραμόρφωση
 - Διατμητική παραμόρφωση
- Για ρευστά σε κίνηση μελετάμε τους ρυθμούς της παραμόρφωσης
 - Ταχύτητα: ρυθμός μεταφοράς
 - Γωνιακή Ταχύτητα: ρυθμός περιστροφής
 - Ρυθμός γραμμικής παραμόρφωσης
 - Ρυθμός διατμητικής παραμόρφωσης