

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

Α. Σακελλάριος

6^ο Εξάμηνο Μηχανικών Επιστήμης Υλικών

Εισαγωγή

- Φύση και μορφή δυνάμεων/ ρυθμός παραμόρφωσης
 - Σωματικές δυνάμεις: δυνάμεις σε όγκο ελέγχου που είναι πλήρης ρευστού από εξωτερικά πεδία
 - Επιφανειακές δυνάμεις: δυνάμεις λόγω φυσικής επαφής με περιβάλλοντα σώματα
- Τανυστής Τάσης
 - Ιδιότητες συνιστωσών/ ανυσμάτων τάσης
- Κίνηση ρευστών και ανάπτυξη τάσεων λόγω ιξώδους
- Ρυθμός Μεταφοράς ορμής και ιξώδης συμπεριφορά
- Στατική ισορροπία και επιφανειακές δυνάμεις
 - Πίεση ρευστών σε ηρεμία και κίνηση
 - Κατανομή πίεσης σε ηρεμούντα ρευστά
 - Μέτρηση πίεσης
- Παραμόρφωση ρευστών
 - Γραμμική και γωνιακή παραμόρφωση
 - Τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης

Δυνάμεις

- Επιφανειακές
- Σωματικές

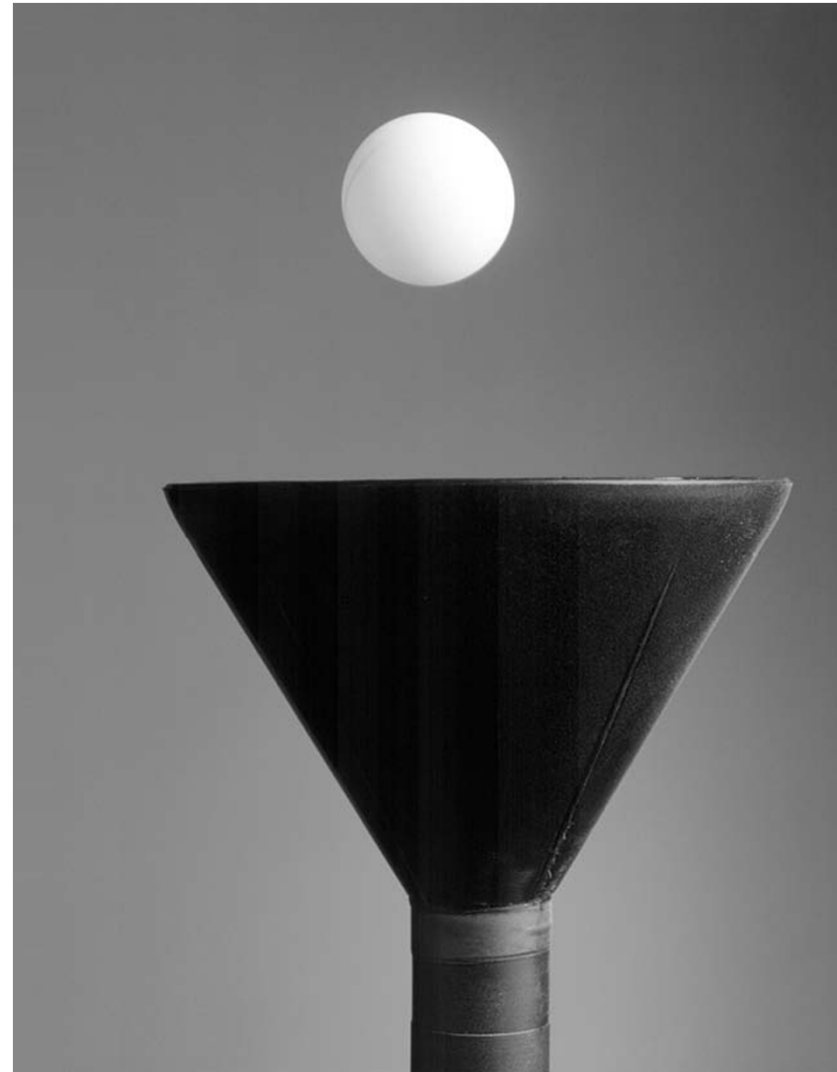


Table tennis ball suspended by an air jet. The control volume momentum principle, studied in this chapter, requires a force to change the direction of a flow. The jet flow deflects around the ball, and the force is the ball's weight. *(Courtesy of Paul Silverman/Fundamental Photographs.)*

Σωματικές Δυνάμεις

Ασκούνται σε όλον τον όγκο ελέγχου

- Θεωρούμε ότι ασκούνται στο κέντρο μάζας κάθε σωματιδίου και είναι ανάλογες της ποσότητας μάζας
- Ορίζουμε το άνυσμα $\mathbf{f}$ ανά μονάδα μάζας σωματικής δύναμης
- Για δυνάμεις βαρύτητας ανά μονάδα μάζας $\mathbf{f}_g$

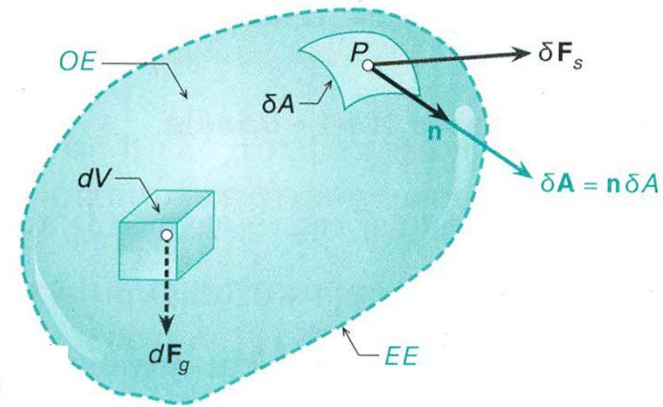
$$\mathbf{f}_g = \mathbf{g} = \mathbf{i}g_x + \mathbf{j}g_y + \mathbf{k}g_z$$

Το $\mathbf{f}$ ταυτίζεται με την επιτάχυνση της βαρύτητας και αναλύεται στις συνιστώσες της ανάλογα με το σύστημα αναφοράς

Σωματικές Δυνάμεις

- Για στοιχειώδη μάζα:

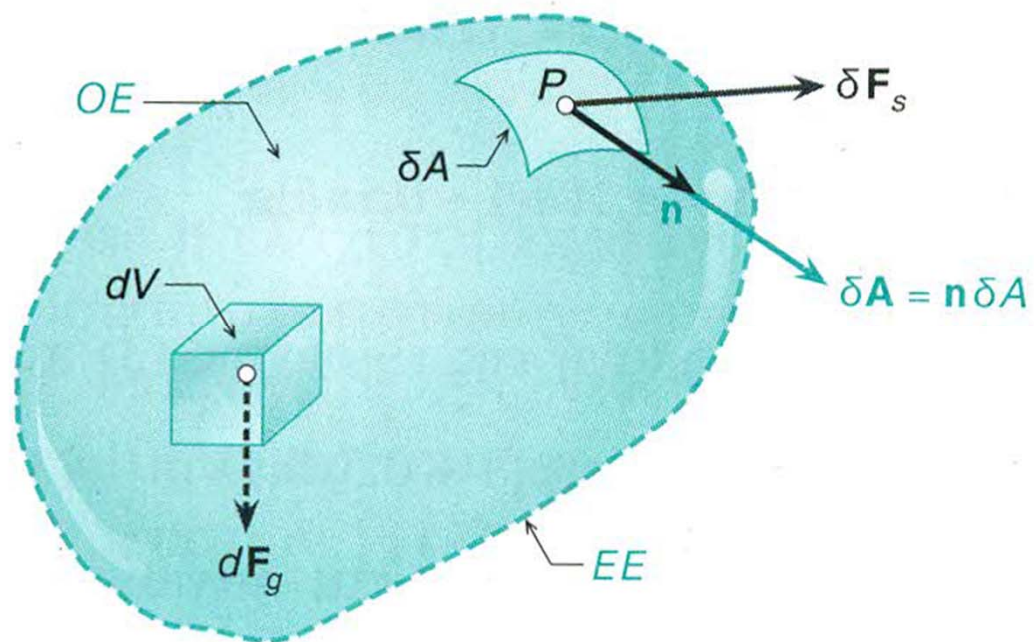
$$d\mathbf{F}_g = \mathbf{g} dm = \mathbf{g} \rho dV$$



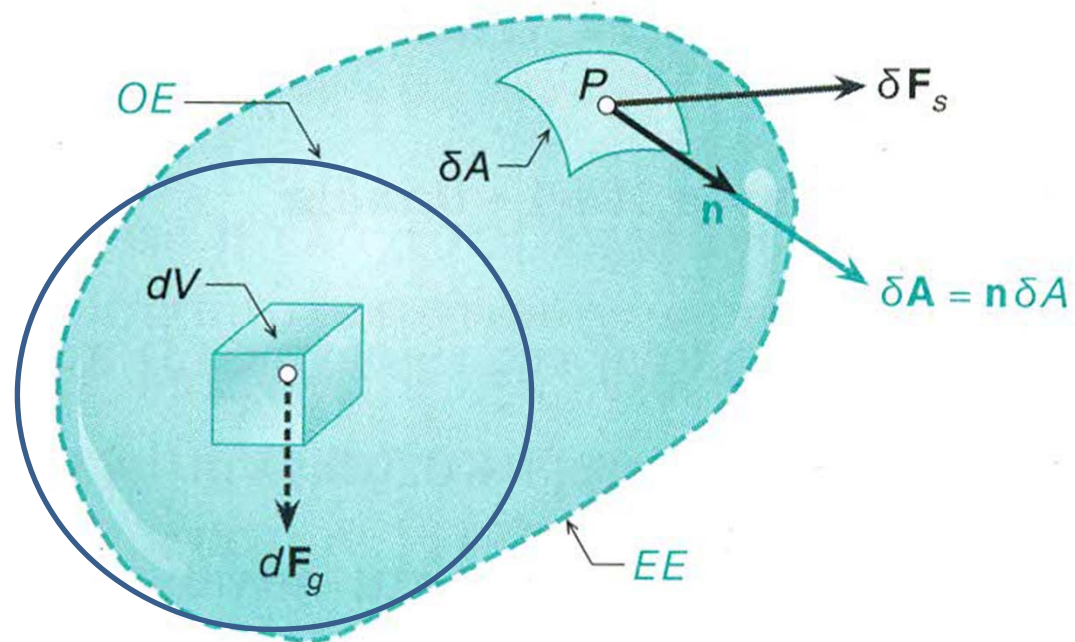
Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τη συνολική δύναμη στο βαρυντικό πεδίο

$$\mathbf{F}_g = \iiint_{OE} \mathbf{g} \rho dV = \left\{ \begin{array}{l} \text{Συνισταμένη των σωματικών δυνάμεων} \\ \text{οι οποίες ασκούνται πάνω στον όγκο} \\ \text{ελέγχου από το πεδίο βαρύτητας της γης} \end{array} \right.$$

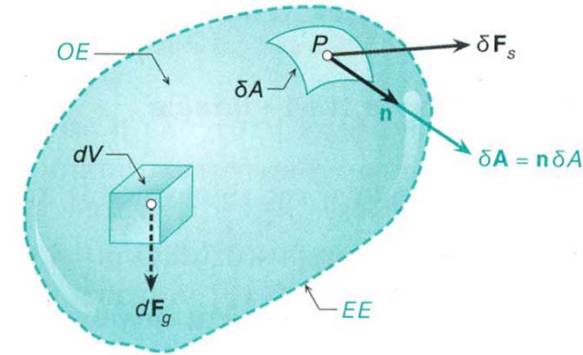
Σωματικές Δυνάμεις



Σωματικές Δυνάμεις



Σωματικές Δυνάμεις



- Μη Συντηρητικές δυνάμεις:
 - Εξαρτώνται από τη θέση και την κίνηση του σωματιδίου
- Η δύναμη (ανά μονάδα μάζας) που ασκείται σε σωματίδιο κινούμενο στο πεδίο βαρύτητας εξαρτάται μόνο από την τοπική τιμή του $\mathbf{g}$
- **Για συντηρητικά πεδία** η δύναμη (ανά μονάδα μάζας) μπορεί να οριστεί ως η κλίση της συνάρτησης δυναμικού:

$$\mathbf{f} = \nabla \Phi$$

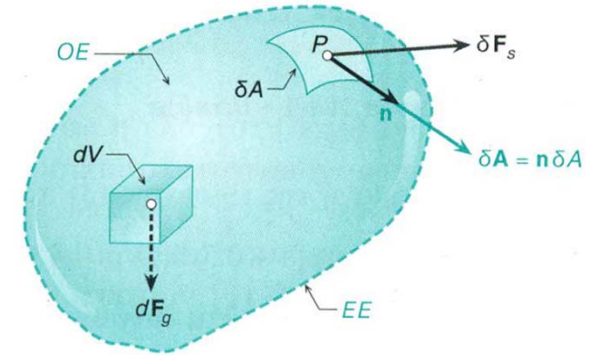
Στο βαρυτικό πεδίο

$$\mathbf{g} = -\nabla \Phi$$

Το δυναμικό της βαρύτητας ορίζεται ως:

$$\Phi = -(xg_x + yg_y + zg_z)$$

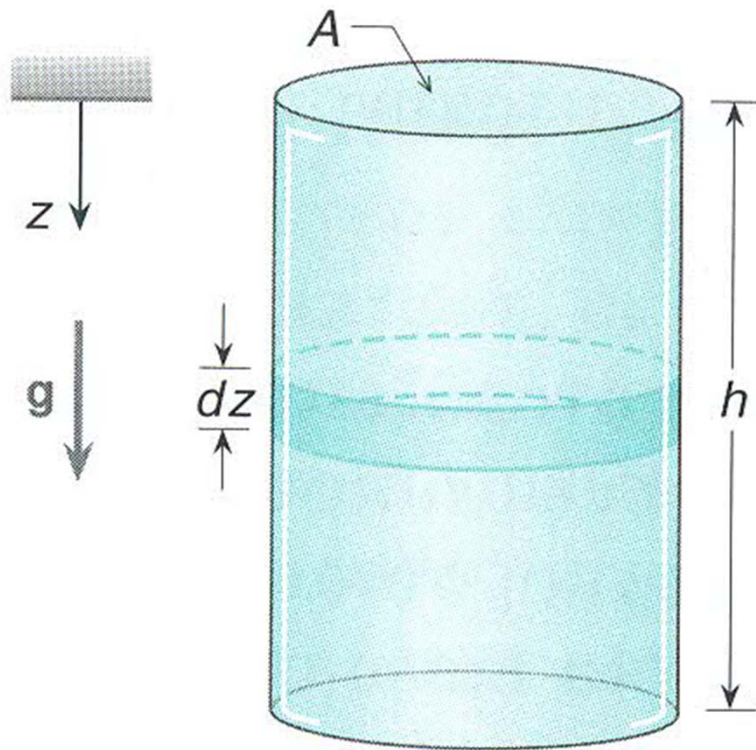
Σωματικές Δυνάμεις



- Συντηρητικές δυνάμεις:
 - Εξαρτώνται μόνο από τη θέση του σωματιδίου
- Η δύναμη που ασκείται σε φορτισμένο σωματίδιο κινούμενο σε μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Εξαρτάται από το πεδίο (μαγνητική επαγωγή $\mathbf{B}$) και το φορτίο q αλλά και την ταχύτητα $\mathbf{v}$
- Για μη συντηρητικές δυνάμεις δεν ορίζεται συνάρτηση δυναμικού!



$$A = 1 \text{ m}^2$$

$$h = 3 \text{ m}$$

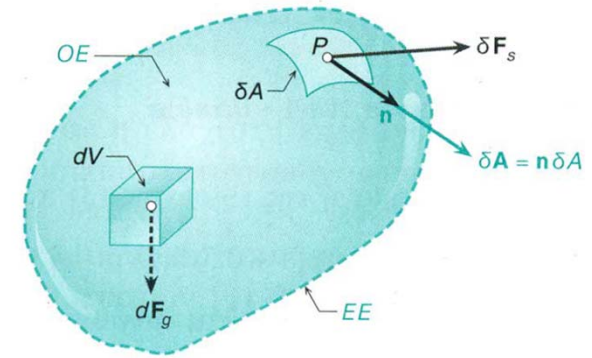
$$\rho = \rho_0 (1 + az)$$

$$\rho_0 = 1,25 \text{ kg/m}^3$$

$$a = 0,15 \text{ m}^{-1}$$

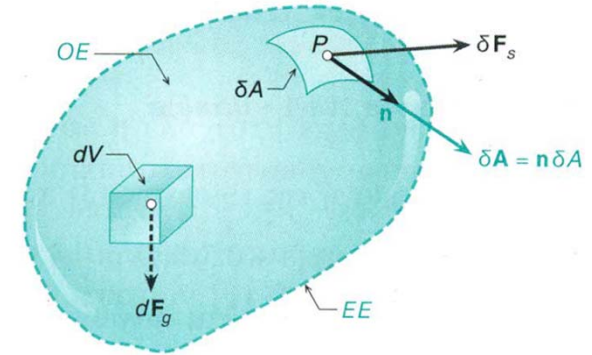
Δύναμη βαρύτητας;

Επιφανειακές Δυνάμεις



- Βρίσκονται στη επιφάνεια του όγκου ελέγχου
- Ασκούνται δια μέσου αυτής
- Η σχέση των επιφανειακών δυνάμεων με την επιφάνεια ορίζει τη φύση των δυνάμεων αυτών
 - Πως ορίζεται το διάνυσμα της επιφάνειας;
 - Πως ορίζεται η τάση;
 - Ποια είδη τάσεων υπάρχουν και πως αυτά σχετίζονται με την επιφάνεια που δρουν;

Επιφανειακές Δυνάμεις



- Η σχέση των επιφανειακών δυνάμεων με την επιφάνεια ορίζει τη φύση των δυνάμεων αυτών

- Πως ορίζεται το διάνυσμα της επιφάνειας;

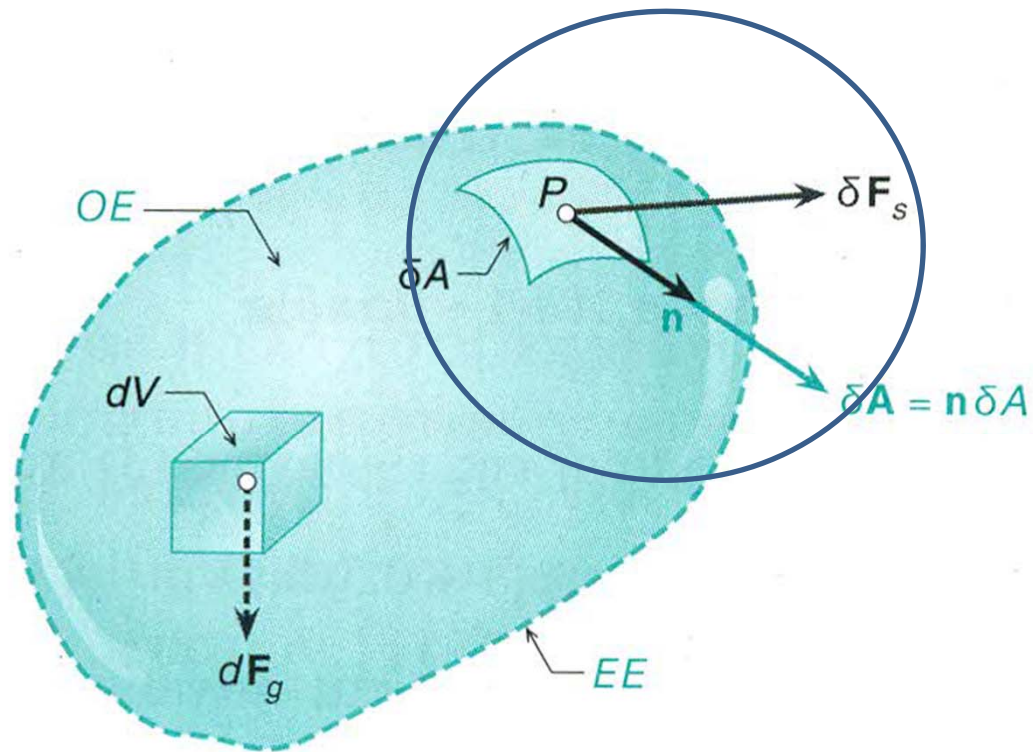
$$\delta \mathbf{A} = \mathbf{n} \delta A$$

- Πως ορίζεται η τάση;

$$\text{Τάση} = \lim_{\delta \mathbf{A} \rightarrow \delta \mathbf{A}_0} \frac{\delta \mathbf{F}_s}{\delta \mathbf{A}}$$

- Ποια είδη τάσεων υπάρχουν και πως αυτά σχετίζονται με την επιφάνεια που δρουν;

Επιφανειακές Δυνάμεις



Η τάση είναι πηλίκο δύο διανυσμάτων και όχι απλό διάνυσμα:
Η τάση είναι ένας τανυστής β' τάξης ή ένας δυαδικός ή δυάδα

Ο τανυστής τάσεων

- ✓ Το διάνυσμα της δύναμης στο καρτεσιανό σύστημα αναλύεται σε:

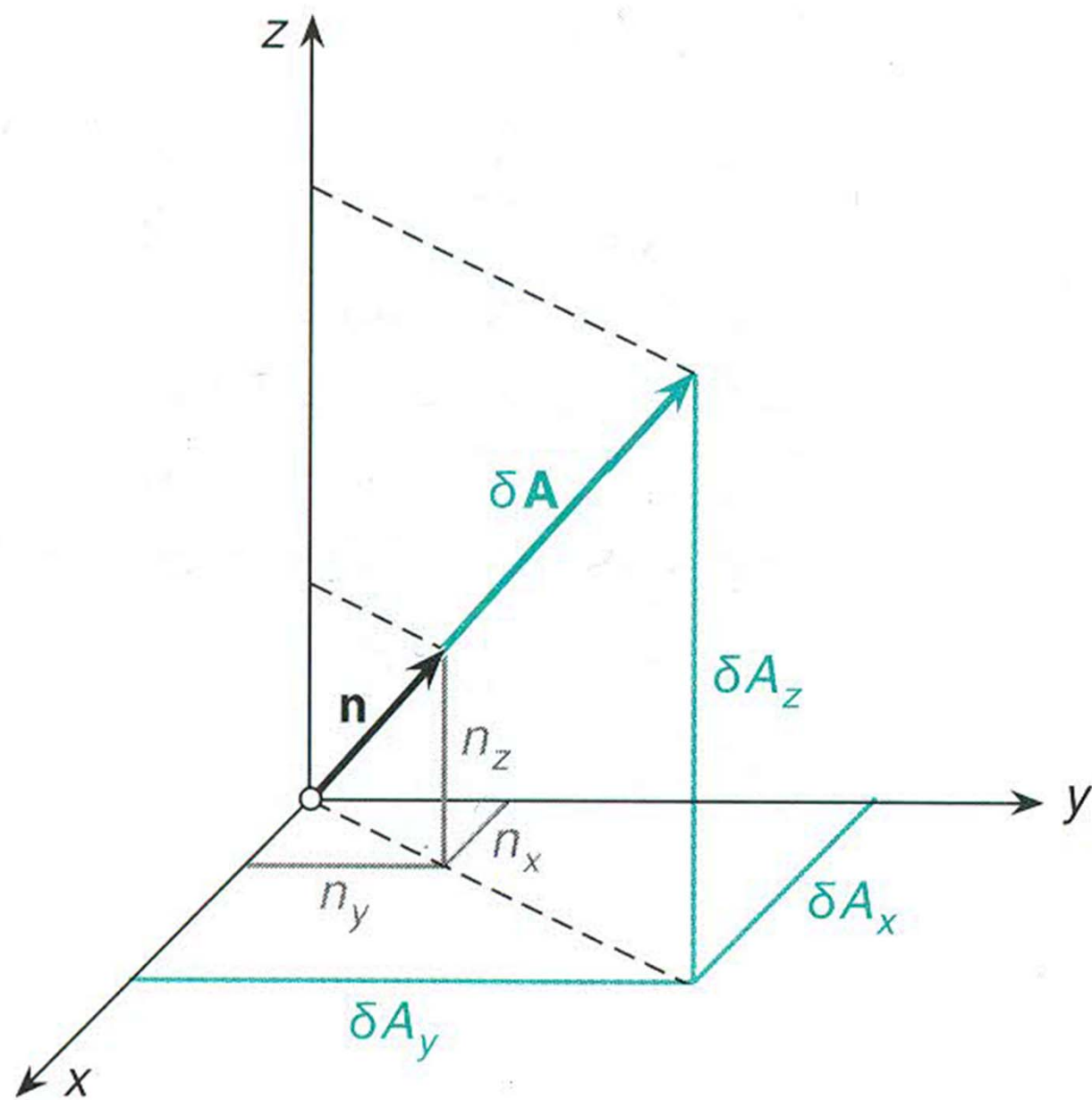
$$\delta \mathbf{F}_s = \mathbf{i} \delta F_x + \mathbf{j} \delta F_y + \mathbf{k} \delta F_z$$

- ✓ Το διάνυσμα της επιφάνειας στο καρτεσιανό σύστημα αναλύεται σε:

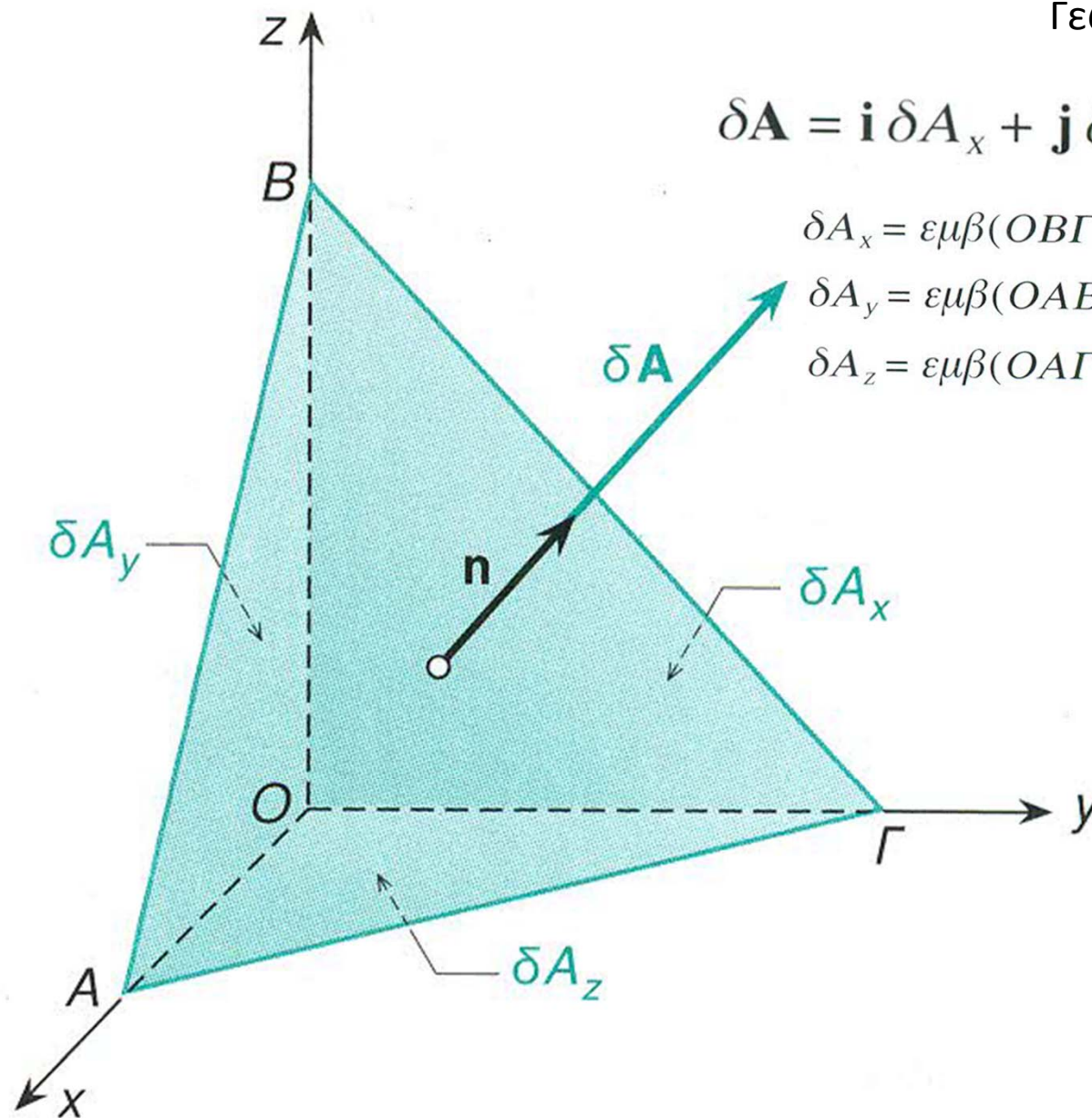
$$\delta \mathbf{A} = \mathbf{i} \delta A_x + \mathbf{j} \delta A_y + \mathbf{k} \delta A_z$$

Η τάση είναι πηλίκο δύο διανυσμάτων και όχι απλό διάνυσμα:

Η τάση είναι ένας τανυστής β' τάξης ή ένας δυαδικός ή δυάδα



✓ Το διάνυσμα της επιφάνειας στο καρτεσιανό σύστημα:
Γεωμετρική ερμηνεία



$$\delta \mathbf{A} = \mathbf{i} \delta A_x + \mathbf{j} \delta A_y + \mathbf{k} \delta A_z$$

$$\delta A_x = \text{εμβ}(OB\Gamma) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) \delta A = n_x \delta A$$

$$\delta A_y = \text{εμβ}(OAB) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \delta A = n_y \delta A$$

$$\delta A_z = \text{εμβ}(OAG) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \delta A = n_z \delta A$$

Ο τανυστής τάσεων

- ✓ Μετά την ανάλυση των ανυσμάτων δύναμης και επιφάνειας:
 - ✓ Θεωρούμε ότι κάθε συνιστώσα της δύναμης

$$(\delta F_x, \delta F_y \text{ και } \delta F_z)$$

- ✓ επιδρά σε κάθε συνιστώσα της επιφάνειας.

$$(\delta A_x, \delta A_y \text{ και } \delta A_z)$$

- ✓ Πόσοι είναι οι πιθανοί συνδυασμοί?

Οτανυστής τάσεων

$$\frac{\delta F_x}{\delta A_x}, \quad \frac{\delta F_x}{\delta A_y}, \quad \frac{\delta F_x}{\delta A_z},$$

$$\frac{\delta F_y}{\delta A_x}, \quad \frac{\delta F_y}{\delta A_y}, \quad \frac{\delta F_y}{\delta A_z},$$

$$\frac{\delta F_z}{\delta A_x}, \quad \frac{\delta F_z}{\delta A_y}, \quad \frac{\delta F_z}{\delta A_z}$$

Ο τανυστής τάσεων: δείκτες

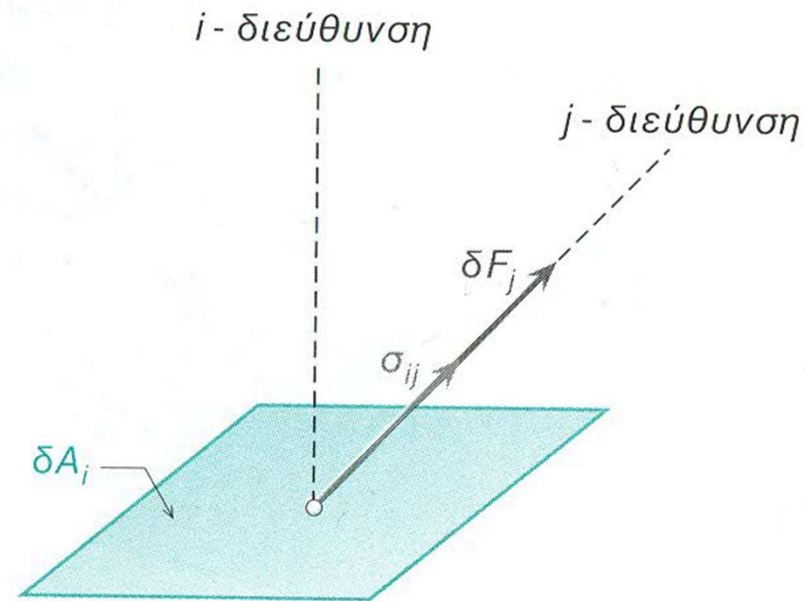
$$\sigma_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας (= τάση)} \\ \text{η οποία ασκείται πάνω σε μια } i\text{-επιφάνεια} \\ \text{κατά τη διεύθυνση } j \text{ του χώρου} \end{array} \right\}$$

$$\sigma_{ij} = \lim_{\delta A_i \rightarrow \delta A_0} \left(\frac{\delta F_j}{\delta A_i} \right)$$

Η τάση είναι πηλίκο δύο διανυσμάτων και όχι απλό διάνυσμα:
Η τάση είναι ένας τανυστής β' τάξης και παριστάνεται με το σ

Ο τανυστής τάσεων: δείκτες

$$\sigma_{ij} = \lim_{\delta A_i \rightarrow \delta A_0} \left(\frac{\delta F_j}{\delta A_i} \right)$$



Για

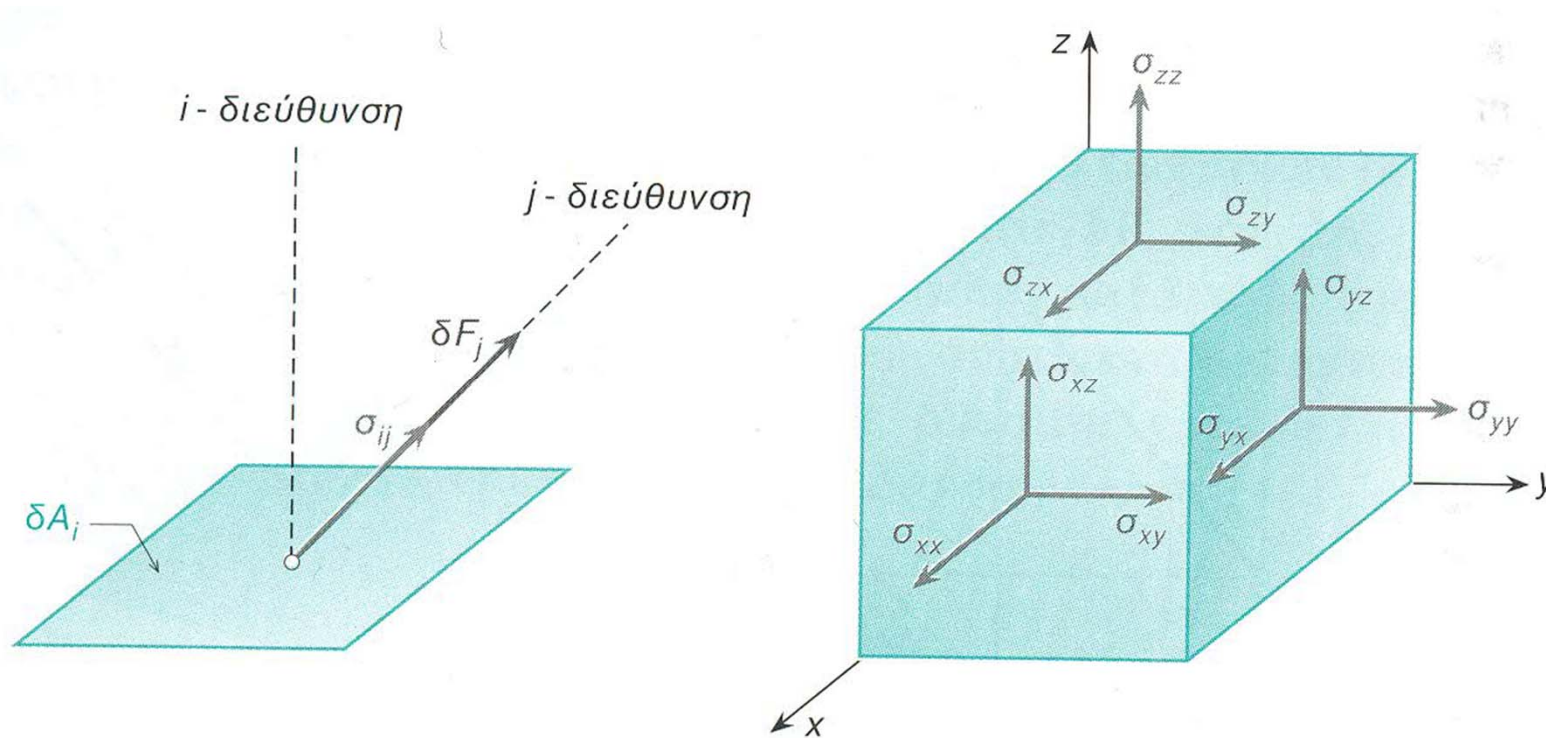
$$i = x, y, z \text{ και } j = x, y, z,$$

Προκύπτουν οι όροι του τανυστή σ

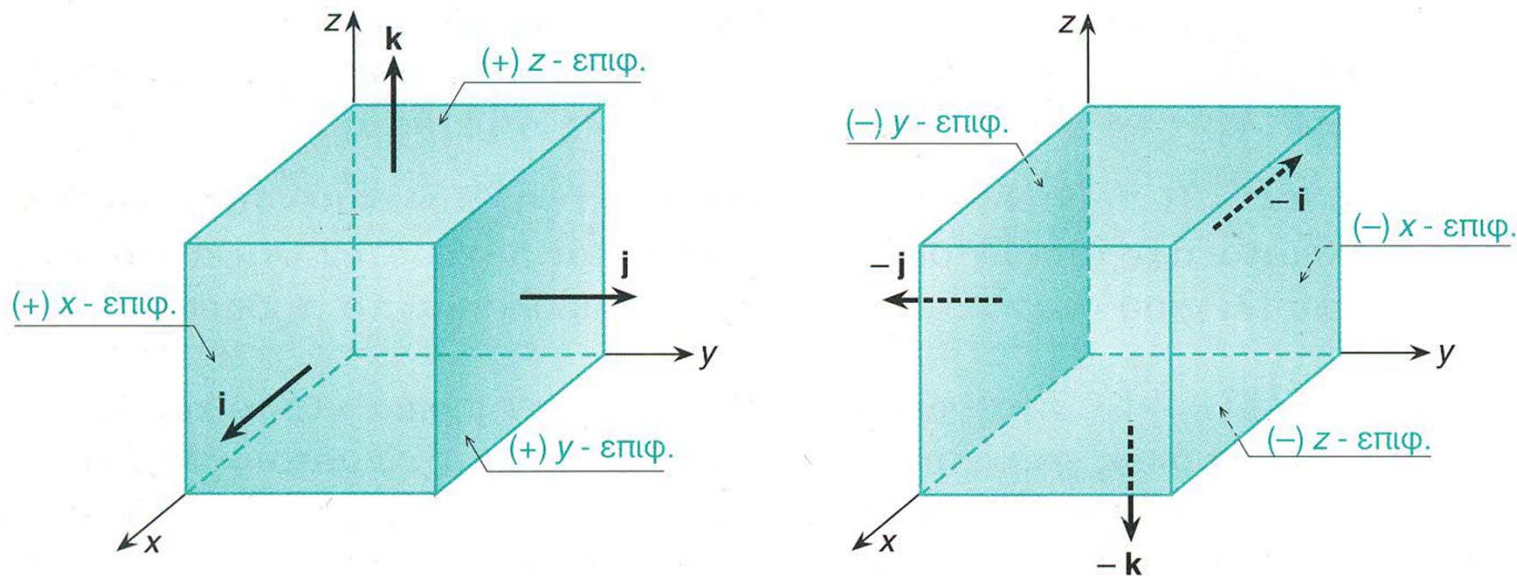
Ο τανυστής τάσεων: δείκτες

$$\sigma_{ij} = \lim_{\delta A_i \rightarrow \delta A_0} \left(\frac{\delta F_j}{\delta A_i} \right)$$

$i = x, y, z$ και $j = x, y, z$,



Ο τανυστής τάσεων: συμβάσεις



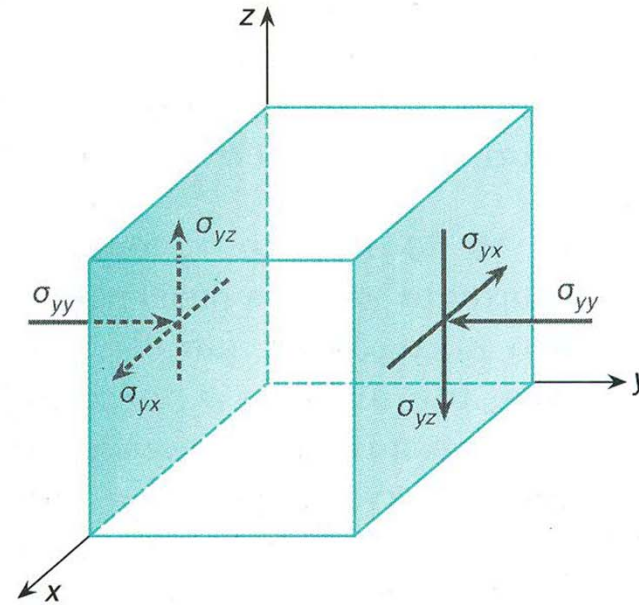
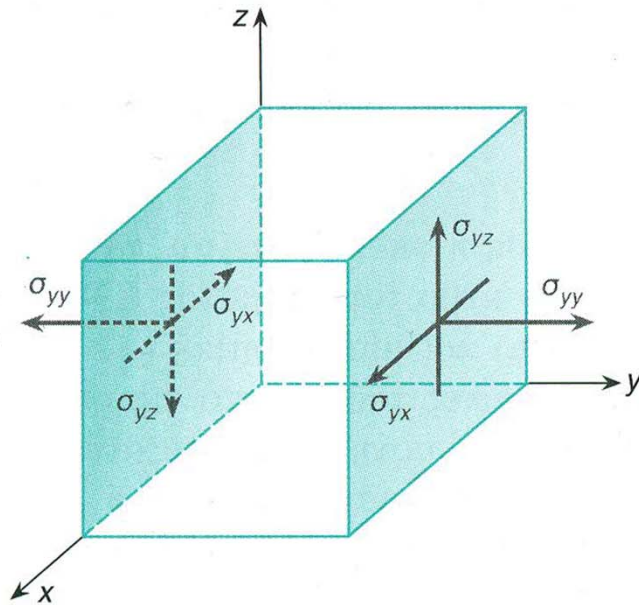
Θετική επιφάνεια: θετική φορά ως προς το σύστημα αναφοράς

Αρνητική επιφάνεια: αρνητική φορά ως προς το σύστημα αναφοράς

Θετική Τάση: η τάση που ενεργεί είτε πάνω σε θετική επιφάνεια κατά τη θετική διεύθυνση είτε πάνω σε μια αρνητική επιφάνεια κατά την αρνητική διεύθυνση

Αρνητική τάση???

Ο τανυστής τάσεων: συμβάσεις



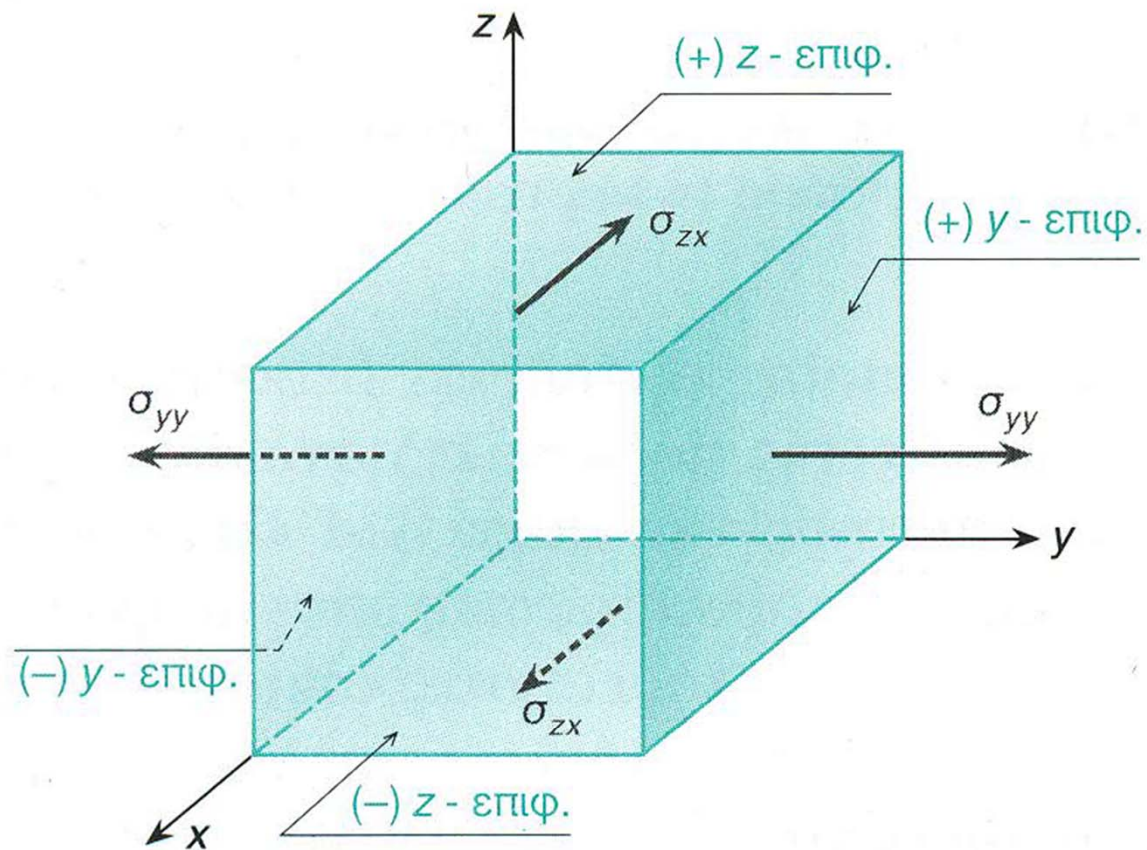
$i=j$: κάθετες (ορθές) τάσεις

$i \neq j$: διατμητικές τάσεις

Σε τι διαφέρουν ως προς:

την επιφάνεια που δρουν;

την παραμόρφωση που προκαλούν;



Το πρόβλημα: Ένα σωματίδιο ρευστού έχει σχήμα κύβου και είναι προσανατολισμένο όπως φαίνεται στο Σχήμα Π3-2. Να σχεδιαστούν τα ανύσματα όλων των πιθανών τάσεων οι οποίες ασκούνται πάνω στην επιφάνεια του σωματιδίου αυτού και δίνονται από τις εκφράσεις: (α) $\sigma_{zx} = -5 \text{ kPa}$ και (β) $\sigma_{yy} = 10 \text{ kPa}$.

Οτανυστής τάσεων: γραφές

Κατά Gibbs:

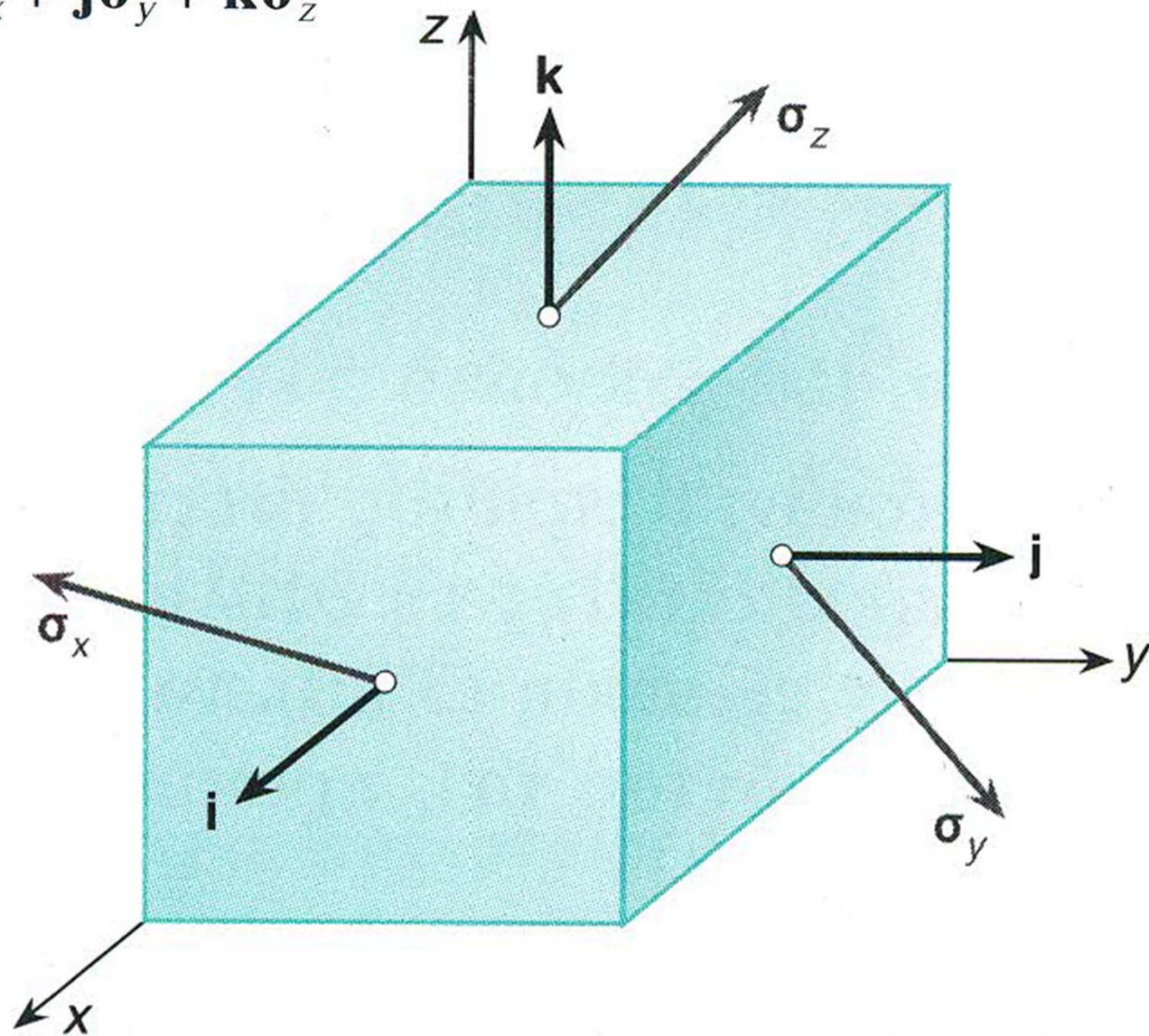
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i}\mathbf{i}\sigma_{xx} + \mathbf{i}\mathbf{j}\sigma_{xy} + \mathbf{i}\mathbf{k}\sigma_{xz} + \mathbf{j}\mathbf{i}\sigma_{yx} + \mathbf{j}\mathbf{j}\sigma_{yy} + \mathbf{j}\mathbf{k}\sigma_{yz} + \mathbf{k}\mathbf{i}\sigma_{zx} + \mathbf{k}\mathbf{j}\sigma_{zy} + \mathbf{k}\mathbf{k}\sigma_{zz}$$

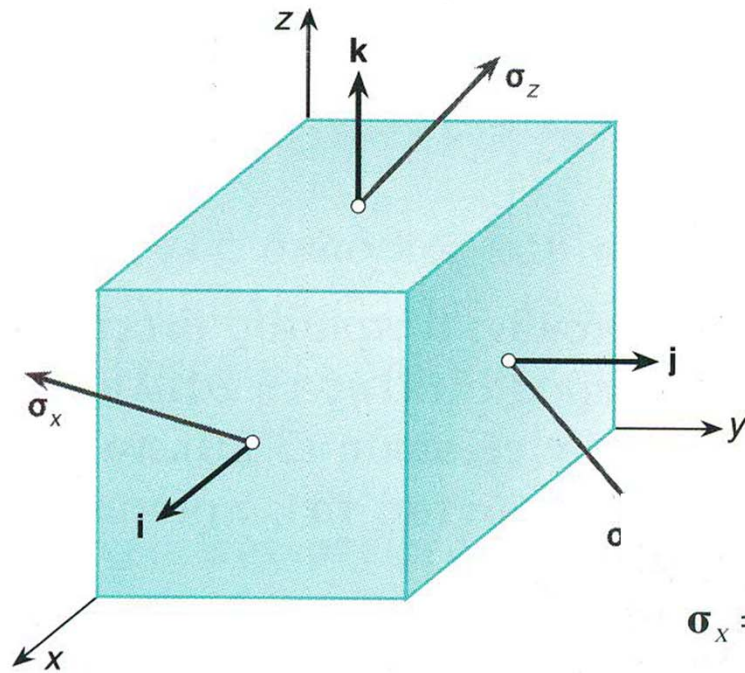
Ή ισοδύναμα σε τριωνυμική μορφή:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i}\boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{j}\boldsymbol{\sigma}_y + \mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}_z$$

όπου $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_y$ και $\boldsymbol{\sigma}_z$ είναι τα ανύσματα τάσης

$$\sigma = \mathbf{i}\sigma_x + \mathbf{j}\sigma_y + \mathbf{k}\sigma_z$$





$$\boldsymbol{\sigma}_x = \mathbf{i}\sigma_{xx} + \mathbf{j}\sigma_{xy} + \mathbf{k}\sigma_{xz} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Δύναμη ανά μονάδα επι-} \\ \text{φάνειας η οποία ασκείται} \\ \text{πάνω σε μια } x\text{-επιφάνεια} \end{array} \right\}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_y = \mathbf{i}\sigma_{yx} + \mathbf{j}\sigma_{yy} + \mathbf{k}\sigma_{yz} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Δύναμη ανά μονάδα επι-} \\ \text{φάνειας η οποία ασκείται} \\ \text{πάνω σε μια } y\text{-επιφάνεια} \end{array} \right\}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z = \mathbf{i}\sigma_{zx} + \mathbf{j}\sigma_{zy} + \mathbf{k}\sigma_{zz} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Δύναμη ανά μονάδα επι-} \\ \text{φάνειας η οποία ασκείται} \\ \text{πάνω σε μια } z\text{-επιφάνεια} \end{array} \right\}$$

Ο τανυστής τάσεων: γραφές

Με πίνακες:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

Ή σε συμπυκνόμενη μορφή:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}^T [\sigma_{ij}] \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}^T = [\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}]$$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Οτανυστής τάσεων: γραφές

Με δείκτες:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

Ή κατά Einstein:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

Εξ' ορισμού, δείκτες που εμφανίζονται δύο φορές στον ίδιο όρο παίρνουν όλες τις δυνατές τιμές τους (εν προκειμένω, 1,2, και 3)

Ο τανυστής τάσεων: ιδιότητες

Συμμετρικός τανυστής:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$$

Ή ισοδύναμα:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \forall i \neq j$$

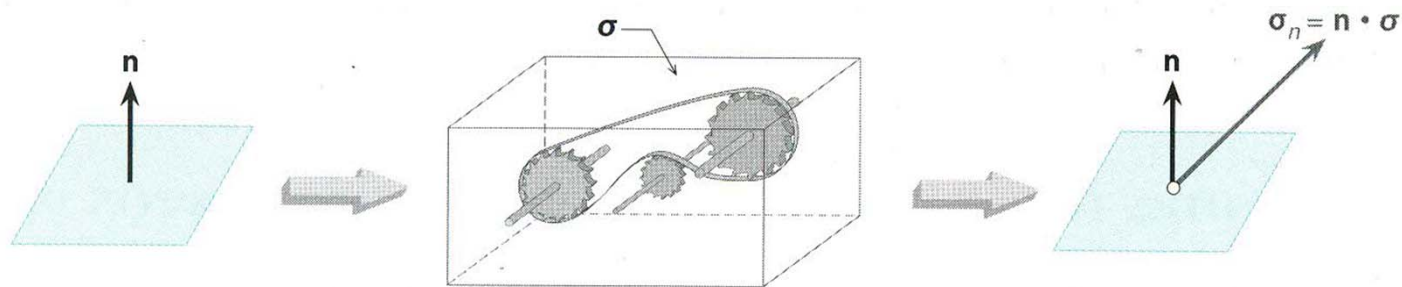
Πόσες είναι οι ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή τάσης?

Οτανυστής τάσεων: ιδιότητες

Για κάθε επιφάνεια, η ασκούμενη τάση (άνυσμα) δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Όπου $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια



Οτανυστής τάσεων: ιδιότητες

Ο τανυστής τάσεων μπορεί να αναλυθεί:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{U} + \boldsymbol{\tau}$$

Δυαδικός πίεσης $-p\mathbf{U}$

Δυαδικός ιξώδους τάσης $\boldsymbol{\tau}$

Μοναδιαίος δυαδικός $[\mathbf{U}] = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Οτανυστής τάσεων: ιδιότητες

Με πίνακες:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Ή

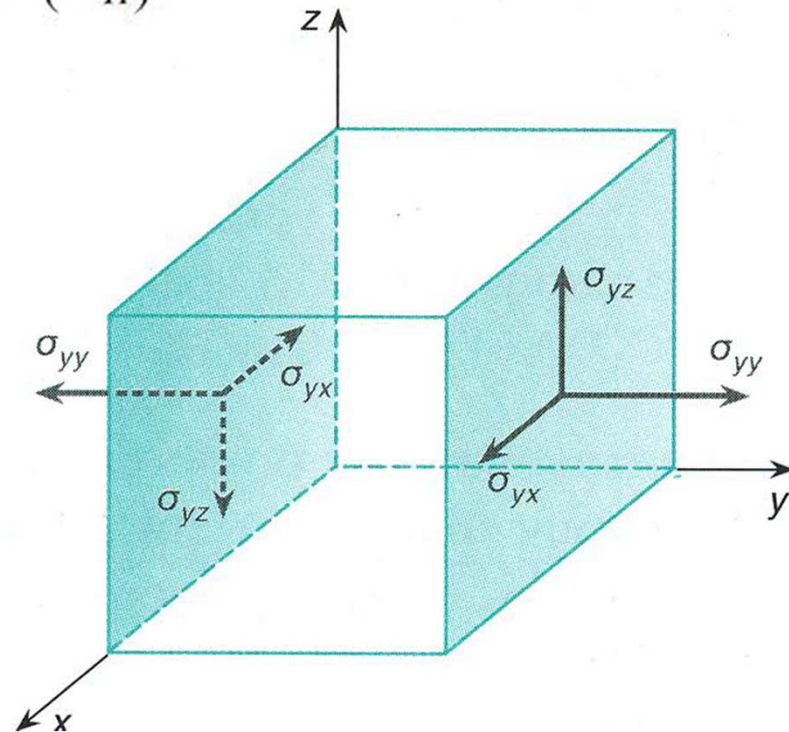
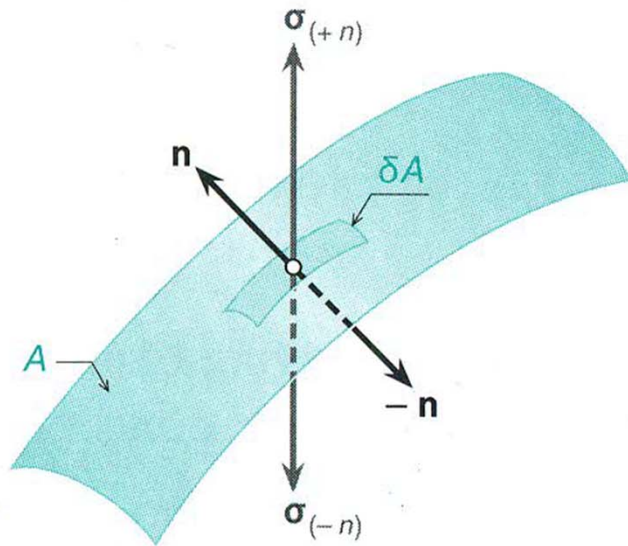
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p + \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -p + \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Ανύσματα τάσεων

Κατά σύμβαση: θετική είναι η εξωτερική επιφάνεια του όγκου ελέγχου
δηλαδή αυτή που «δείχνει» προς το περιβάλλον

Δράση-αντίδραση:

$$\sigma_{(+n)} = -\sigma_{(-n)}$$



Ανύσματα τάσεων

Το άνυσμα τάσης μπορεί να προβληθεί κατά τη διεύθυνση $\mathbf{m}$:

$$\sigma_{nm} = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{m}$$

Αφού από τις ιδιότητες του τανυστή τάσης:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Το άνυσμα τάσης είναι γνωστό σε κάθε σημείο:

$$\sigma_{nm} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}$$

Ανύσματα τάσεων

Από τις ιδιότητες του τανυστή τάσης:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_n &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{U} + \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \right\} \quad \boldsymbol{\sigma}_n = -\mathbf{n}p + \boldsymbol{\tau}_n$$

Έτσι προκύπτουν:

Άνυσμα πίεσης:

$$-\mathbf{n}p = \mathbf{n} \cdot (-p\mathbf{U})$$

Άνυσμα πίεσης: κάθετα στην επιφάνεια ελέγχου, ισοτροπικό και διευθύνονται προς το εσωτερικό

Άνυσμα ιξώδους τάσης

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$$

Άνυσμα ιξώδους τάσης: οφείλεται στο ιξώδες, εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας

Το πρόβλημα: Τα ανύσματα τάσης σε ένα σημείο P του χώρου είναι:

$$\sigma_x = a\mathbf{i} \quad \sigma_y = b\mathbf{j} - a\mathbf{k} \quad \sigma_z = -a\mathbf{j} + b\mathbf{k} \quad (1)$$

όπου τα μεγέθη a και b είναι σταθερά ($a = 1 \text{ kPa}$ και $b = 3 \text{ kPa}$).

α. Ποιά είναι η κατάσταση τάσης στο σημείο P ;

β. Να ευρεθεί το άνυσμα τάσης, σ_n , το οποίο εφαρμόζεται στο σημείο P πάνω στην επιφάνεια η οποία είναι κάθετη στο μοναδιαίο άνυσμα:

$$\mathbf{n} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) / \sqrt{2} \quad (2)$$

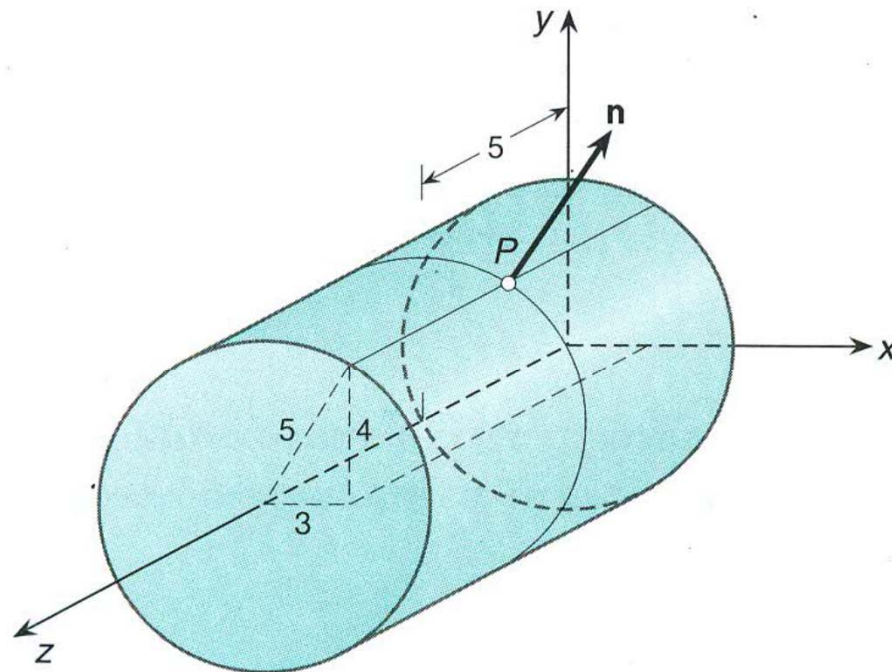
γ. Να υπολογιστεί η συνιστώσα του ανύσματος σ_n κατά τη διεύθυνση του $\mathbf{n}$.

Το πρόβλημα: Ο δυαδικός τάσης ενός συνεχούς μέσου είναι:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 5y & 0 \\ 5y & 0 & 5x^2 \\ 0 & 5x^2 & 10xz \end{bmatrix} \quad (1)$$

όπου x, y, z είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων του χώρου. Να ευρεθεί το άνυσμα τάσης το οποίο ασκείται στο σημείο $P(3, 4, 5)$ πάνω στο επίπεδο το οποίο εφάπτεται στην κυλινδρική επιφάνεια:

$$x^2 + y^2 = 25 \quad (2)$$



Ανύσματα επιφανειακών δυνάμεων

$$\mathbf{F}_s = \oiint_{EE} \boldsymbol{\sigma}_n dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{Συνισταμένη των επιφανειακών δυνάμε-} \\ \text{ων οι οποίες ασκούνται πάνω στον όγκο} \\ \text{ελέγχου από το άμεσο περιβάλλον του} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{F}_s = \oiint_{EE} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dA$$

Ανύσματα επιφανειακών δυνάμεων

$$\mathbf{F}_p = \oint_{EE} (-\mathbf{n}) p dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{Συνισταμένη των δυνάμεων πίεσης οι} \\ \text{οποίες ασκούνται πάνω στον όγκο} \\ \text{ελέγχου από το άμεσο περιβάλλον του} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{F}_\tau = \oint_{EE} \boldsymbol{\tau}_n dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{Συνισταμένη των ιξωδών δυνάμεων οι} \\ \text{οποίες ασκούνται πάνω στον όγκο} \\ \text{ελέγχου από το άμεσο περιβάλλον του} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\tau$$

ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΗ;;;

Ανύσματα επιφανειακών δυνάμεων

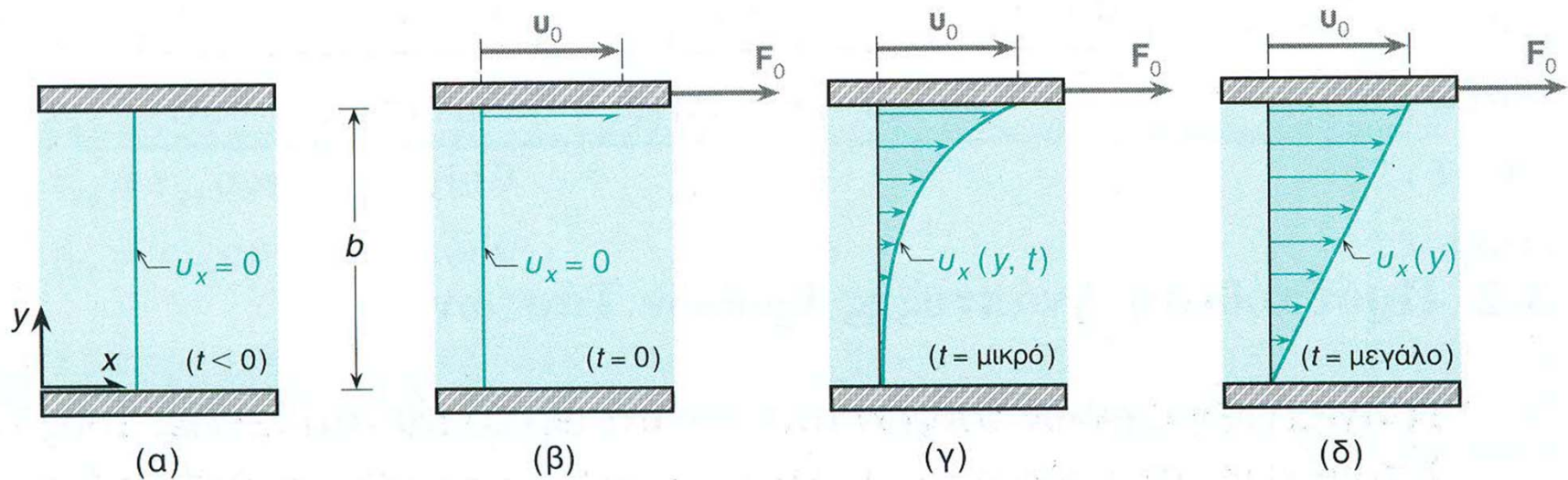
$$\mathbf{F}_p = \oint_{EE} (-\mathbf{n}) p dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{Συνισταμένη των δυνάμεων πίεσης οι} \\ \text{οποίες ασκούνται πάνω στον όγκο} \\ \text{ελέγχου από το άμεσο περιβάλλον του} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{F}_\tau = \oint_{EE} \boldsymbol{\tau}_n dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{Συνισταμένη των ιξωδών δυνάμεων οι} \\ \text{οποίες ασκούνται πάνω στον όγκο} \\ \text{ελέγχου από το άμεσο περιβάλλον του} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\tau$$

Ο όγκος του ρευστού πρέπει να είναι πλήρης και να περιβάλλεται από στρώματα του ίδιου ρευστού

Προϋποθέσεις ανάπτυξης ιξωδών τάσεων (ροή Couette)



Ο τανυστής ταχύτητας

Προϋπόθεση για την ανάπτυξη ιξωδών τάσεων είναι η βαθμίδα ταχύτητας στο χώρο.

Η ταχύτητα είναι διάνυσμα με τρεις συνιστώσες στο χώρο που κάθε μία μπορεί να μεταβάλλεται κατά τις τρεις κατευθύνσεις στο χώρο

Έτσι ορίζεται ο δυαδικός ταχύτητας:

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial v_x / \partial x & \partial v_y / \partial x & \partial v_z / \partial x \\ \partial v_x / \partial y & \partial v_y / \partial y & \partial v_z / \partial y \\ \partial v_x / \partial z & \partial v_y / \partial z & \partial v_z / \partial z \end{bmatrix}$$

Μοριακή Θεώρηση ιξωδών τάσεων

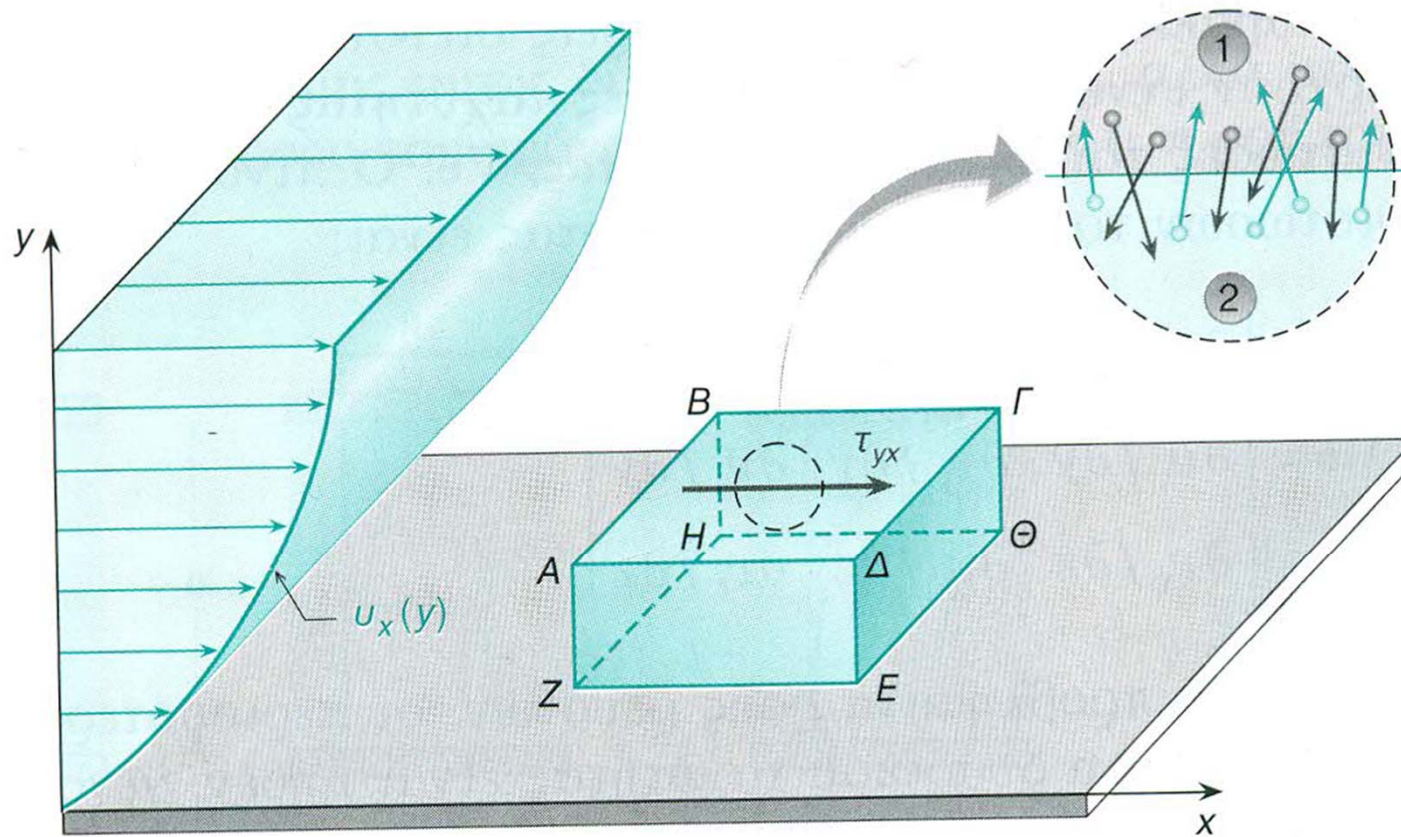
$$\{Τάση\} = \frac{\{Δύναμη\}}{\{Επιφάνεια\}} = \frac{\{MLT^{-2}\}}{\{L^2\}} = \frac{\{MLT^{-1}\}}{\{T\}\{L^2\}}$$

Τάση: Δύναμη ανηγμένη στην επιφάνεια

ή

ρυθμός μεταφοράς ορμής ανηγμένος στην επιφάνεια

Μοριακή Θεώρηση ιξωδών τάσεων



Μοριακή Θεώρηση ιξωδών τάσεων

$$\tau_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας } \eta \\ \text{οποία ασκείται πάνω σε μια } i\text{-επιφά-} \\ \text{νεια κατά τη διεύθυνση } j \text{ του χώρου} \end{array} \right\}$$

$$\tau_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταφοράς } j\text{-ορμής ανά μονάδα} \\ \text{επιφάνειας κατά τη διεύθυνση } i \text{ η οποία} \\ \text{είναι κάθετη προς τη διεύθυνση } j \text{ της ροής} \end{array} \right\}$$

Ρευστά σε ηρεμία: Επιφανειακές δυνάμεις

- Τι είδους δυνάμεις μπορούν να αναπτυχθούν σε ρευστό σε ηρεμία;

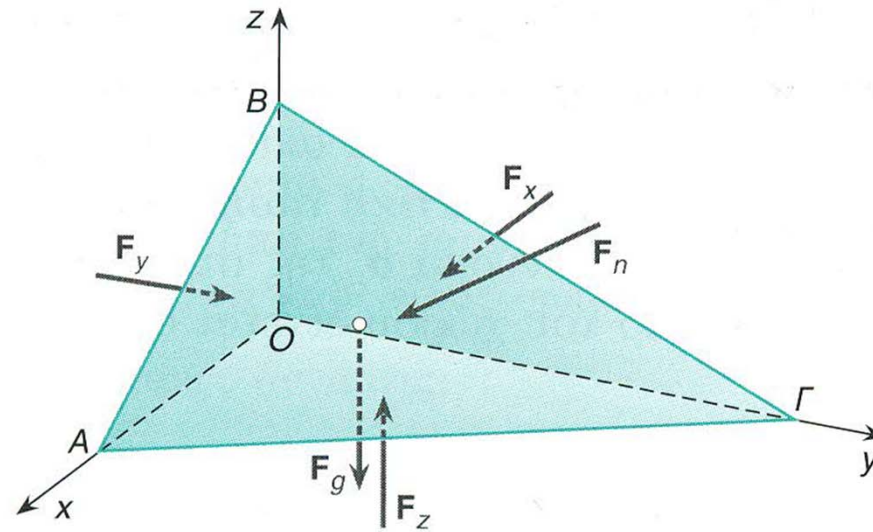
– Δυνάμεις πίεσης;



– Δυνάμεις λόγω ιξώδους;

Ρευστά σε ηρεμία: Επιφανειακές δυνάμεις

Αφού το ρευστό είναι σε ηρεμία οι δυνάμεις είναι μόνο κάθετες στις επιφάνειες που ενεργούν (γιατί;)



$$\mathbf{F}_n = \sigma_n \delta A_n$$

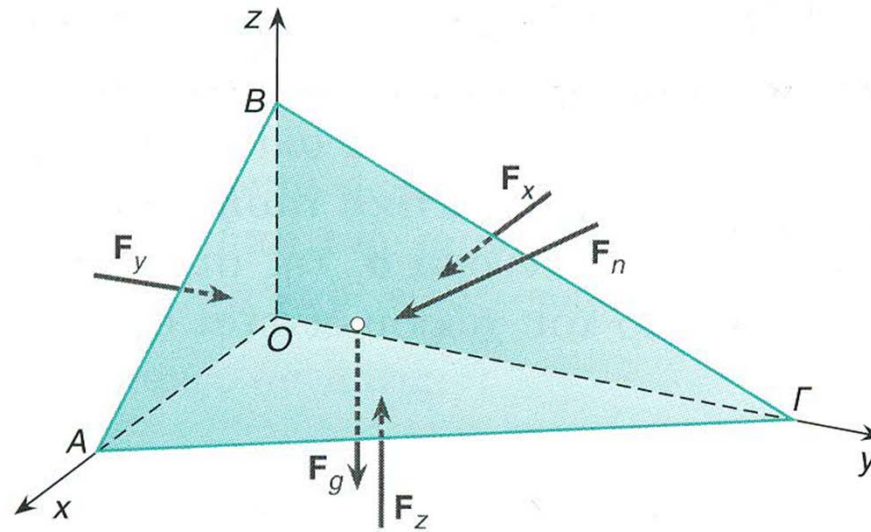
$$\mathbf{F}_x = \sigma_x \delta A_x$$

$$\mathbf{F}_y = \sigma_y \delta A_y$$

$$\mathbf{F}_z = \sigma_z \delta A_z$$

Ρευστά σε ηρεμία: Επιφανειακές δυνάμεις

Αφού το ρευστό είναι σε ηρεμία οι δυνάμεις ορίζονται ως συνάρτηση της πίεσης σε κάθε κατεύθυνση:

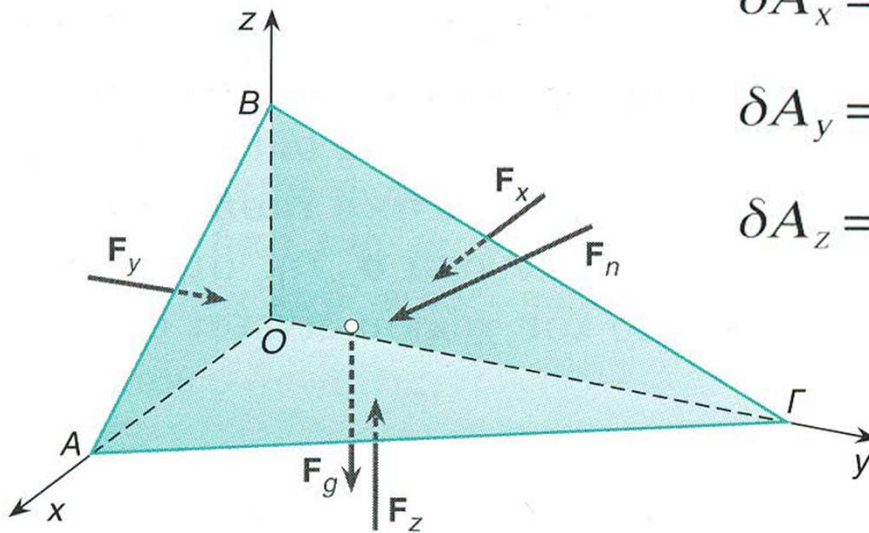


$$\boldsymbol{\sigma}_n = -\mathbf{n} p_n \quad \boldsymbol{\sigma}_x = \mathbf{i} p_x \quad \boldsymbol{\sigma}_y = \mathbf{j} p_y \quad \boldsymbol{\sigma}_z = \mathbf{k} p_z$$

Ρευστά σε ηρεμία: Επιφανειακές δυνάμεις

Οι τρεις συνιστώσες της πίεσης δρουν εξ' ορισμού στις στοιχειώδεις επιφάνειες:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = -\mathbf{n} p_n \quad \boldsymbol{\sigma}_x = \mathbf{i} p_x \quad \boldsymbol{\sigma}_y = \mathbf{j} p_y \quad \boldsymbol{\sigma}_z = \mathbf{k} p_z$$

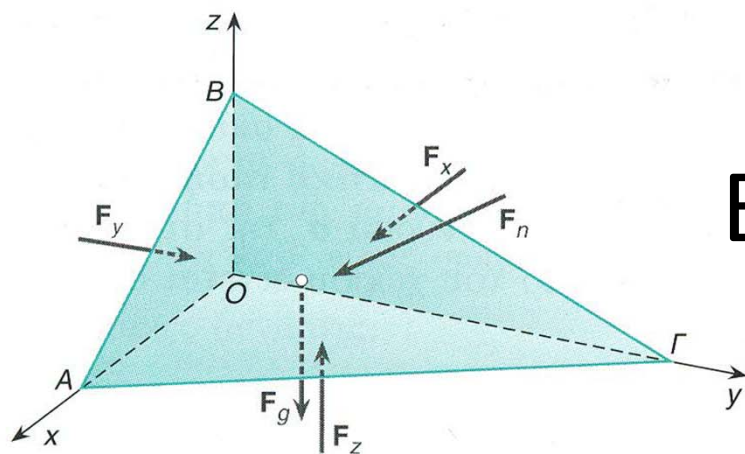


$$\delta A_x = \varepsilon\mu\beta(OB\Gamma) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) \delta A_n = n_x \delta A_n$$

$$\delta A_y = \varepsilon\mu\beta(OAB) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \delta A_n = n_y \delta A_n$$

$$\delta A_z = \varepsilon\mu\beta(OA\Gamma) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \delta A_n = n_z \delta A_n$$

Ρευστά σε ηρεμία: Επιφανειακές δυνάμεις



$$\begin{aligned} \sigma_n &= -\mathbf{n} p_n & \sigma_x &= \mathbf{i} p_x & \sigma_y &= \mathbf{j} p_y & \sigma_z &= \mathbf{k} p_z \\ \mathbf{F}_n &= \sigma_n \delta A_n & \mathbf{F}_x &= \sigma_x \delta A_x & \mathbf{F}_y &= \sigma_y \delta A_y & \mathbf{F}_z &= \sigma_z \delta A_z \end{aligned}$$

$$\delta A_x = \varepsilon \mu \beta(OB\Gamma) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) \delta A_n = n_x \delta A_n$$

$$\delta A_y = \varepsilon \mu \beta(OAB) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \delta A_n = n_y \delta A_n$$

$$\delta A_z = \varepsilon \mu \beta(OA\Gamma) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \delta A_n = n_z \delta A_n$$

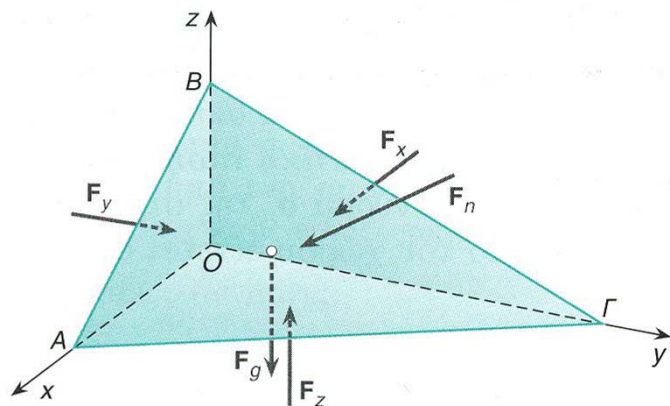
$$\mathbf{F}_n = -\mathbf{n} p_n \delta A_n = -(\mathbf{i} n_x + \mathbf{j} n_y + \mathbf{k} n_z) p_n \delta A_n$$

ή

$$\mathbf{F}_x = \mathbf{i} n_x p_x \delta A_n$$

$$\mathbf{F}_y = \mathbf{j} n_y p_y \delta A_n$$

$$\mathbf{F}_z = \mathbf{k} n_z p_z \delta A_n$$



Ρευστά σε ηρεμία: Επιφανειακές δυνάμεις

Στο ηρεμούν ρευστό δρουν
επιφανειακές και σωματικές δυνάμεις.
Ποιά είναι η συνισταμένη τους;

$$\mathbf{F}_x = \mathbf{i} n_x p_x \delta A_n$$

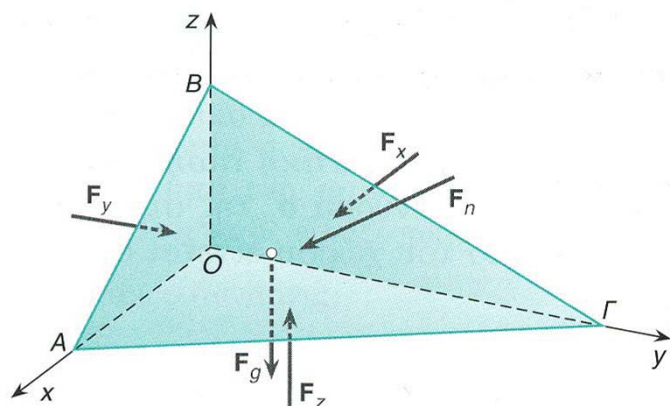
$$\mathbf{F}_y = \mathbf{j} n_y p_y \delta A_n$$

$$\mathbf{F}_z = \mathbf{k} n_z p_z \delta A_n$$

Επιφανειακές δυνάμεις

$$\mathbf{F}_g = \rho \mathbf{g} \delta V$$

Σωματικές δυνάμεις



Ρευστά σε ηρεμία: Επιφανειακές δυνάμεις

Στο ηρεμούν ρευστό δρουν
επιφανειακές και σωματικές δυνάμεις.
Ποιά είναι η συνισταμένη τους;

$$\mathbf{F}_x = \mathbf{i} n_x p_x \delta A_n$$

$$\mathbf{F}_y = \mathbf{j} n_y p_y \delta A_n$$

$$\mathbf{F}_z = \mathbf{k} n_z p_z \delta A_n$$

Επιφανειακές δυνάμεις

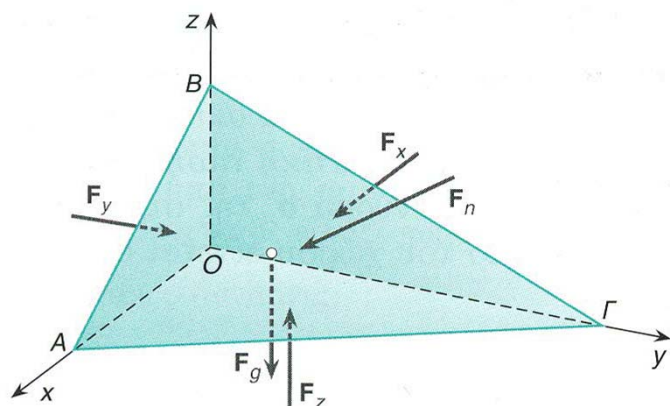
$$\mathbf{F}_g = \rho \mathbf{g} \delta V$$

Σωματικές δυνάμεις

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z = \mathbf{0}$$

ή

$$n_x (p_n - p_x) \mathbf{i} + n_y (p_n - p_y) \mathbf{j} + n_z (p_n - p_z) \mathbf{k} = \rho \mathbf{g} \frac{\delta V}{\delta A_n}$$



Ρευστά σε ηρεμία: Επιφανειακές δυνάμεις

Για $\delta V \rightarrow 0$ το δεξί μέλος μηδενίζεται και συνεπώς:

$$n_x(p_n - p_x)\mathbf{i} + n_y(p_n - p_y)\mathbf{j} + n_z(p_n - p_z)\mathbf{k} = \rho \mathbf{g} \frac{\delta V}{\delta A_n}$$

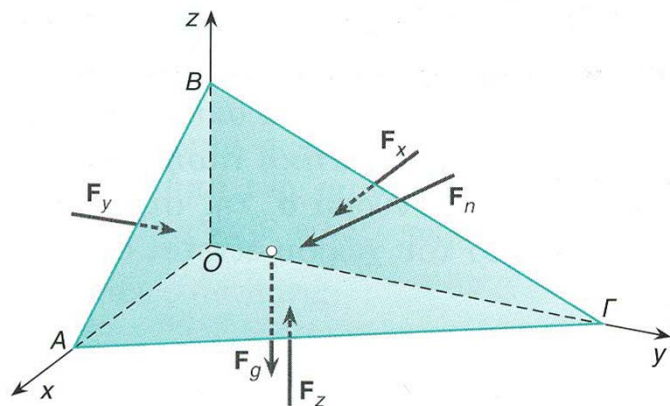
ή

$$n_x(p_n - p_x)\mathbf{i} + n_y(p_n - p_y)\mathbf{j} + n_z(p_n - p_z)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

ή, ισοδύναμα όλες οι επιμέρους συνιστώσες:

$$p_x = p_n \qquad p_y = p_n \qquad p_z = p_n$$

Τι σημαίνει ότι οι συνιστώσες της πίεσης ταυτίζονται με την πίεση στην κάθετη επιφάνεια;



Ρευστά σε ηρεμία: Επιφανειακές δυνάμεις

Για $\delta V=0$ η παρακάτω εξίσωση
εκφυλίζεται και συνεπώς:

$$n_x(p_n - p_x)\mathbf{i} + n_y(p_n - p_y)\mathbf{j} + n_z(p_n - p_z)\mathbf{k} = \rho \mathbf{g} \frac{\delta V}{\delta A_n}$$

ή

$$n_x(p_n - p_x)\mathbf{i} + n_y(p_n - p_y)\mathbf{j} + n_z(p_n - p_z)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

ή, ισοδύναμα όλες οι επιμέρους συνιστώσες:

$$p_x = p_n \quad p_y = p_n \quad p_z = p_n$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = -\mathbf{n} p$$

Η Πίεση είναι ανεξάρτητη της επιφάνειας ή
ισοδύναμα είναι η ίδια για όλες τις
επιφάνειες που διέρχονται από ένα σημείο!

Ρευστά σε ηρεμία: Επιφανειακές δυνάμεις

- Λόγω ανυπαρξίας βαθμίδας ταχύτητας στο χώρο, αναπτύσσονται μόνο δυνάμεις πίεσης.

$$\sigma_n = - n p$$

- Κατ' αναλογία, η ανά μονάδα επιφάνειας δύναμη που ασκείται σε μη κινούμενο σωματίδιο είναι η στατική τάση
- Η τάση αυτή έχει μέτρο ίσο με την πίεση και κατεύθυνση αντίθετη από αυτή του $\mathbf{n}$,
 - εξ' ορισμού προκαλεί συμπίεση και ως τέτοια έχει φορά προς το εσωτερικό του ΟΕ

Ρευστά σε ηρεμία: Επιφανειακές δυνάμεις

- Η σχέση προκύπτει από:

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_n = -\mathbf{n}p + \boldsymbol{\tau}_n \\ \boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{0}. \end{array} \right\} \boldsymbol{\sigma}_n = -\mathbf{n}p$$

- *Ελλείψει βαθμίδας ταχύτητας στο εσωτερικό τους, η παραπάνω σχέση περιγράφει ρευστά που κινούνται στο χώρο ως στερεά!*

Ρευστά σε ηρεμία και κίνηση: Πίεση

- Για ρευστό σε ηρεμία:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

- ή

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΡΕΥΣΤΟΥ ΣΕ ΣΤΑΤΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Ρευστά σε ηρεμία και κίνηση: Πίεση

- Για ρευστό σε κίνηση:

$$\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = -p + \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3}$$

- Ή προσεγγιστικά

$$p = - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

Το πρόβλημα: Δίνεται ο πίνακας των συνιστωσών του δυαδικού τάσης ενός νευτωνικού ρευστού σε ένα σημείο $P(x, y, z)$ του χώρου:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -10 & -3 & 0 \\ -3 & -15 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \text{ kPa} \quad (1)$$

- α. Να υπολογιστεί η πίεση του ρευστού στο σημείο P . (κατά προσέγγιση)
- β. Ποιά είναι η κατάσταση ιξώδους τάσης στο σημείο P ;

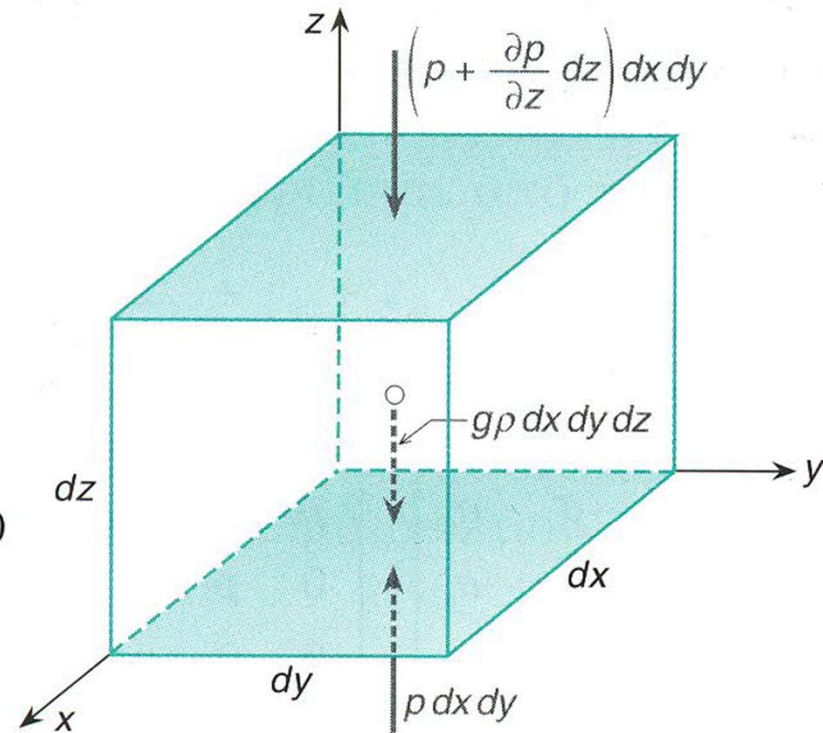
Ρευστά σε ηρεμία: Κατανομή πίεσης

- Για ρευστό σε ηρεμία το κάθε σωματίδιο ισορροπεί ενώ ασκούνται δυνάμεις βαρύτητας και πίεσης:

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = 0$$

$$p dz dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dz dx = 0$$

$$p dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy - g \rho dx dy dz = 0$$



Ρευστά σε ηρεμία: Κατανομή πίεσης

- Για ρευστό σε ηρεμία το κάθε σωματίδιο ισορροπεί ενώ ασκούνται δυνάμεις βαρύτητας και πίεσης:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

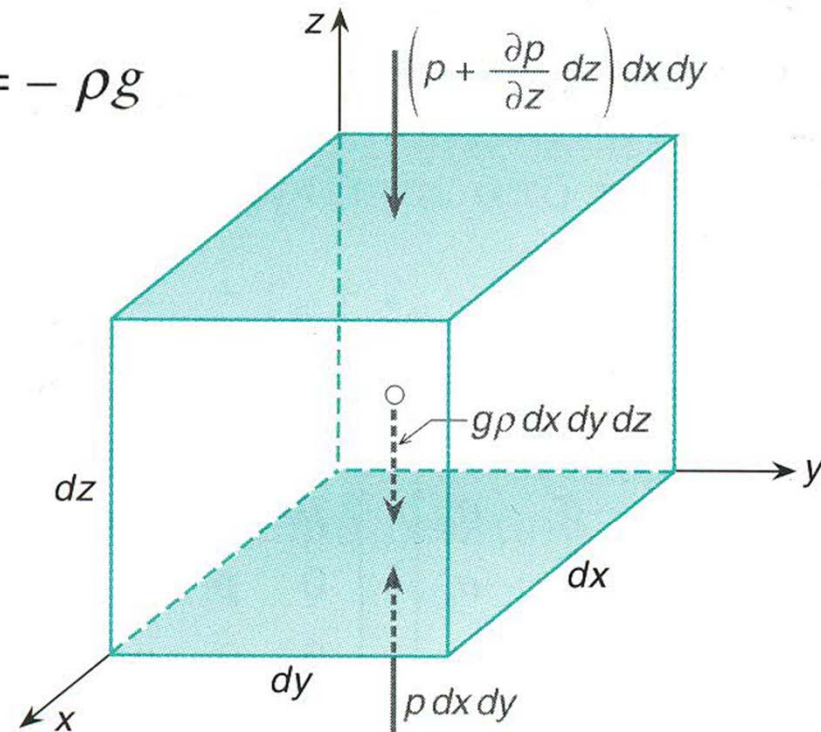
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

- Ή

$$\nabla p + \gamma \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

- Τι είναι το γ ;



Ρευστά σε ηρεμία: Κατανομή πίεσης

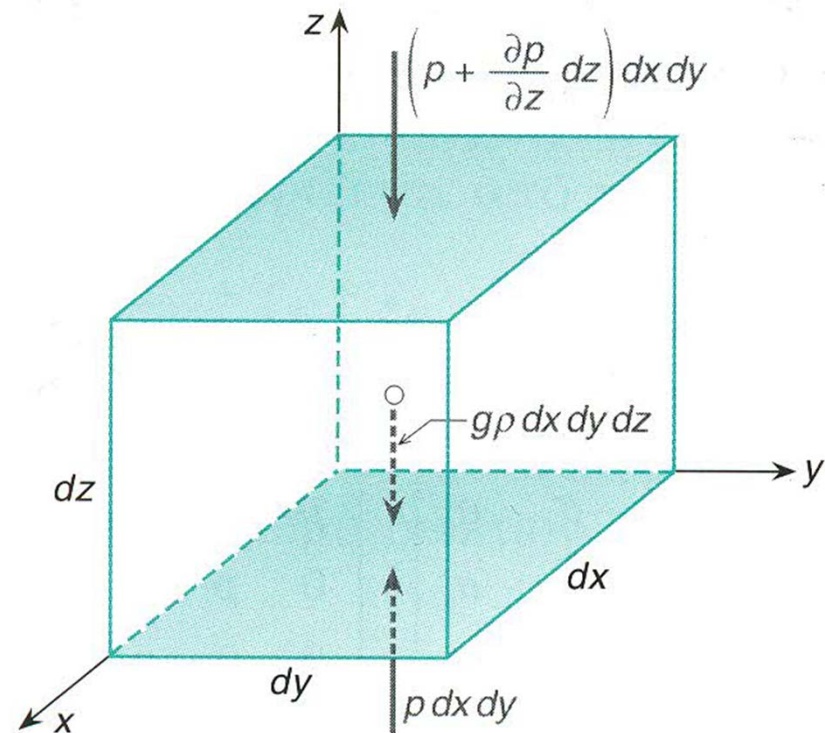
Η πίεση εξαρτάται μόνο από το z :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\gamma$$

Η ολοκλήρωση προϋποθέτει
τη γνώση των

$$g(z) \text{ και } \rho(z)$$

➤ για μικρές μεταβολές του z ,
η επιτάχυνση της βαρύτητας
θεωρείται σταθερή!



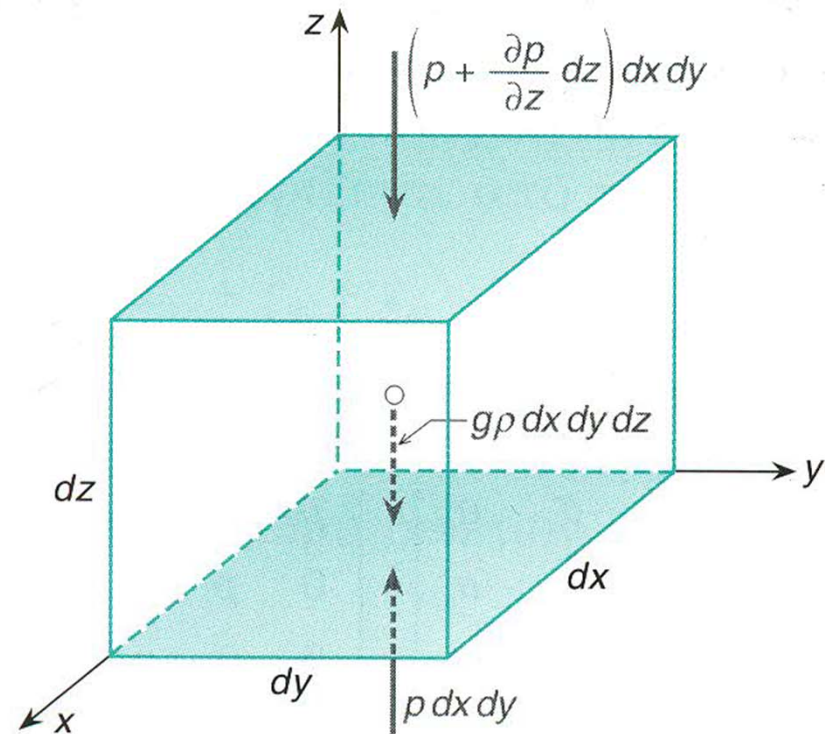
Ρευστά σε ηρεμία: Κατανομή πίεσης

Ασυμπίεστα Ρευστά $\rho=c$:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\gamma$$

ή

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1)$$

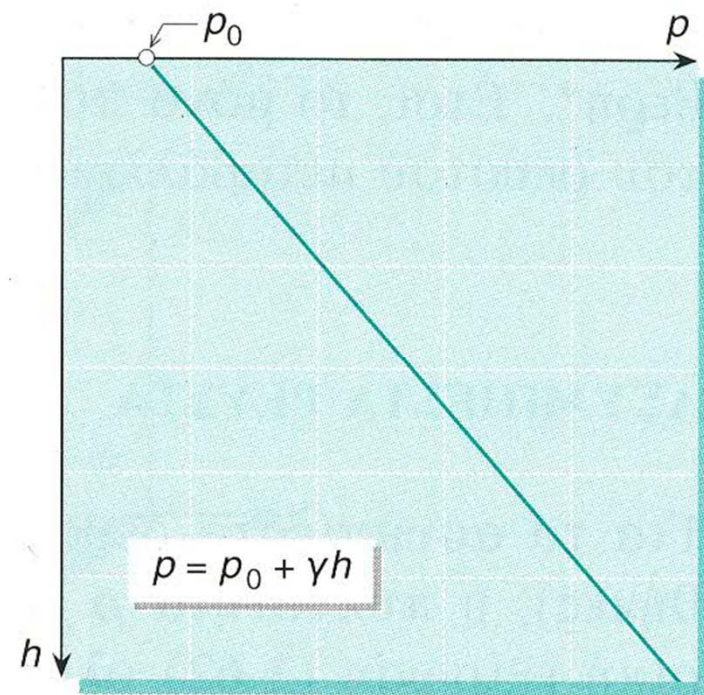
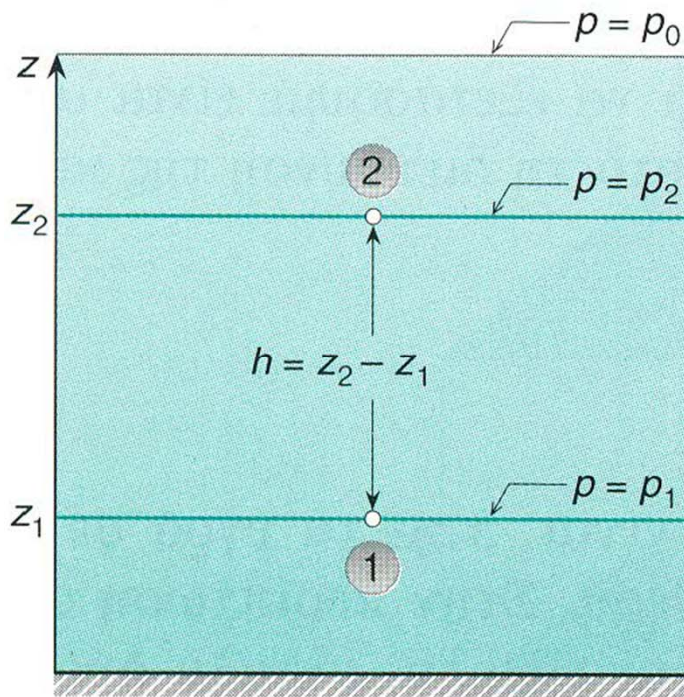


Ρευστά σε ηρεμία: Κατανομή πίεσης

Ασυμπίεστα Ρευστά $\rho = c$:

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1)$$

$$\text{ή} \quad p = p_0 + \gamma h$$



Ρευστά σε ηρεμία: Κατανομή πίεσης

Θεμελιώδης αρχή της υδροστατικής: $p = p_0 + \gamma h$

- Μπορεί η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού να είναι κεκλιμένη και γιατί;
- Εξαρτάται η πίεση από το σχήμα του δοχείου;
- Είναι δυνατόν να υπάρχει υψομετρική διαφορά την ελεύθερη επιφάνεια δύο δοχείων που επικοινωνούν;

Ρευστά σε ηρεμία: Κατανομή πίεσης

Συμπιεστά Ρευστά $\rho \neq c$

- *Αέρια: η μεταβολή της πίεσης και της θερμοκρασίας προκαλεί σημαντικές μεταβολές της πυκνότητας*
- *Η πυκνότητα είναι μεταβλητή ποσότητα και λαμβάνεται υπ' όψιν στην ολοκλήρωση:*

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\gamma$$

Ρευστά σε ηρεμία: Κατανομή πίεσης

Συμπιεστά Ρευστά $\rho \neq c$

- Για τέλεια αέρια: $p = \rho R^* T$
- Η πυκνότητα είναι μεταβλητή ποσότητα και λαμβάνεται υπ' όψιν στην ολοκλήρωση:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\gamma \quad \text{ή} \quad p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{g}{R^*} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T}\right)$$

Ρευστά σε ηρεμία: Κατανομή πίεσης

Συμπιεστά Ρευστά $\rho \neq c$

- *Για τέλεια αέρια και σταθερή θερμοκρασία $T=T_0$ ανάμεσα σε δύο σημεία z_1 και z_2 με υψομετρική διαφορά h :*

$$p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{g}{R^*} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T}\right)$$

$$p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{g(z_2 - z_1)}{R^* T_0}\right) = p_1 \exp\left(-\frac{gh}{R^* T_0}\right)$$

Σε ισοθερμοκρασιακές συνθήκες, η μεταβολή της πίεσης είναι εκθετική με το ύψος

Ρευστά σε ηρεμία: Κατανομή πίεσης

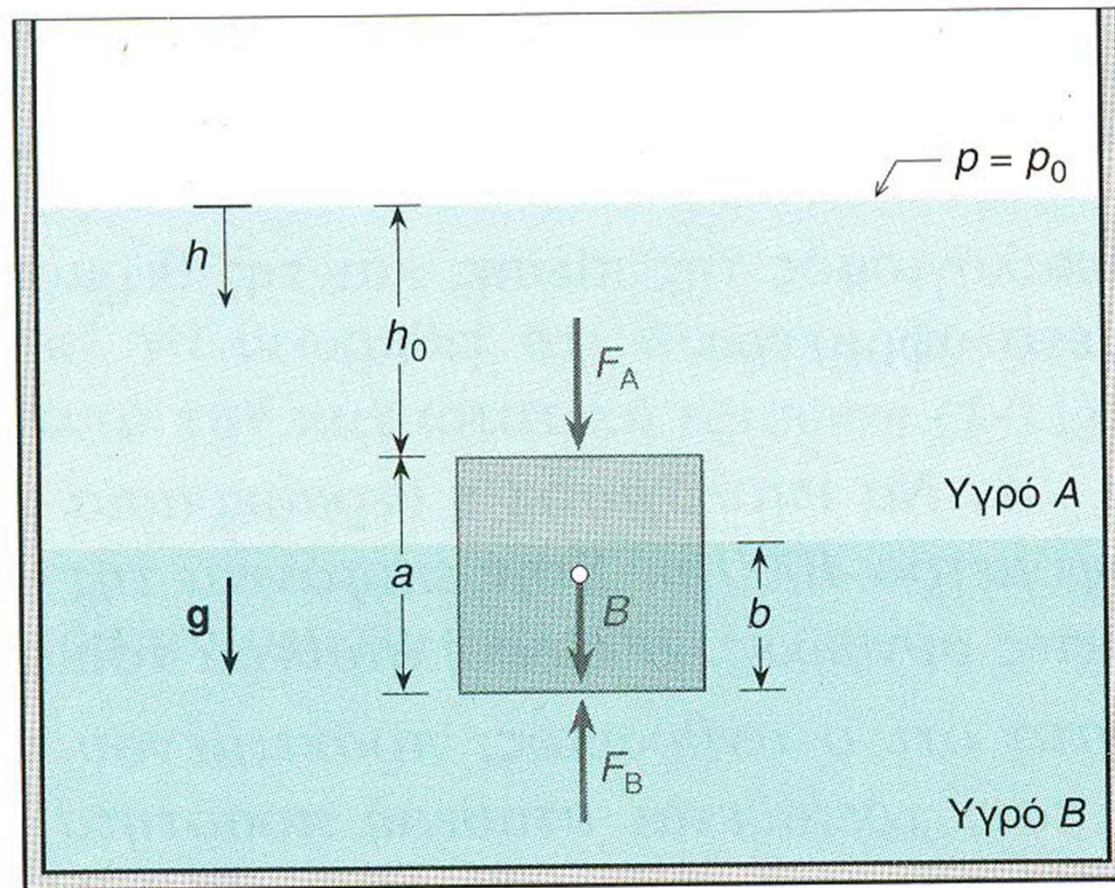
Συμπιεστά Ρευστά $\rho \neq c$

- Για τέλεια αέρια και μη σταθερή θερμοκρασία $T \neq c$:
- Π.χ. για

$$\left. \begin{aligned} T &= T_0 - az \\ p_2 &= p_1 \exp\left(-\frac{g}{R^*} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T}\right) \end{aligned} \right\} p = p_0 \left(1 - \frac{az}{T_0}\right)^{g/aR^*}$$

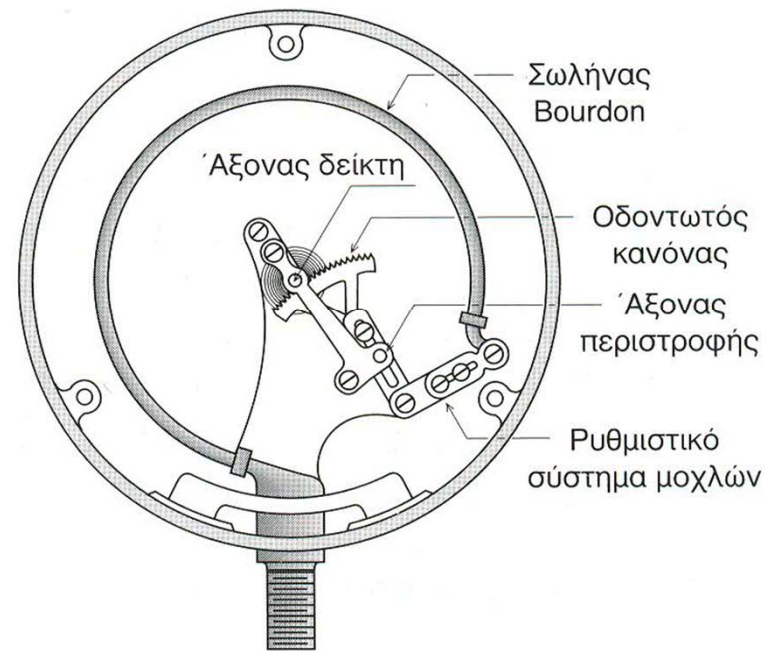
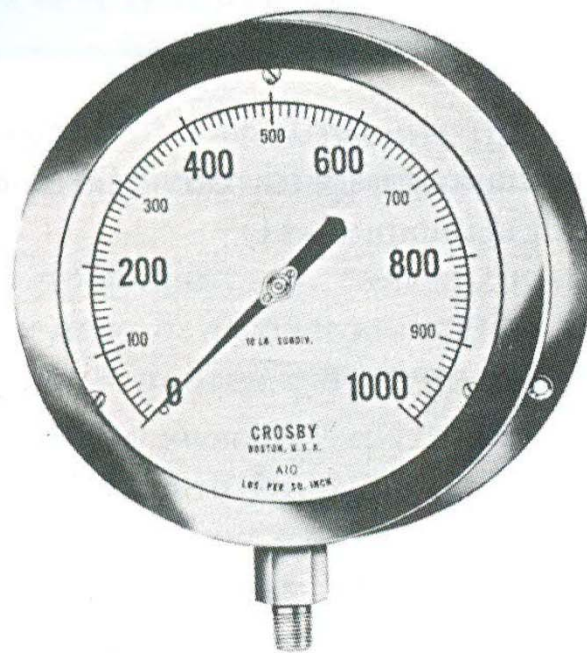
- Όπου P_0 και T_0 οι αρχικές συνθήκες (πίεση και Θερμοκρασία στην επιφάνεια της θάλασσας)

Το πρόβλημα: Ένα στερό σώμα σε σχήμα κύβου, πλευράς $a = 25 \text{ cm}$ και πυκνότητας $\rho = 1225 \text{ kg/m}^3$, ισορροπεί μεταξύ δύο μη αναμείξιμων υγρών A και B όπως φαίνεται στο Σχήμα Π3-8. Οι πυκνότητες των υγρών A και B είναι $\rho_A = 680 \text{ kg/m}^3$ και $\rho_B = 1600 \text{ kg/m}^3$. Να υπολογιστεί το ύψος b του στερεού σώματος που είναι βυθισμένο στο υγρό B .



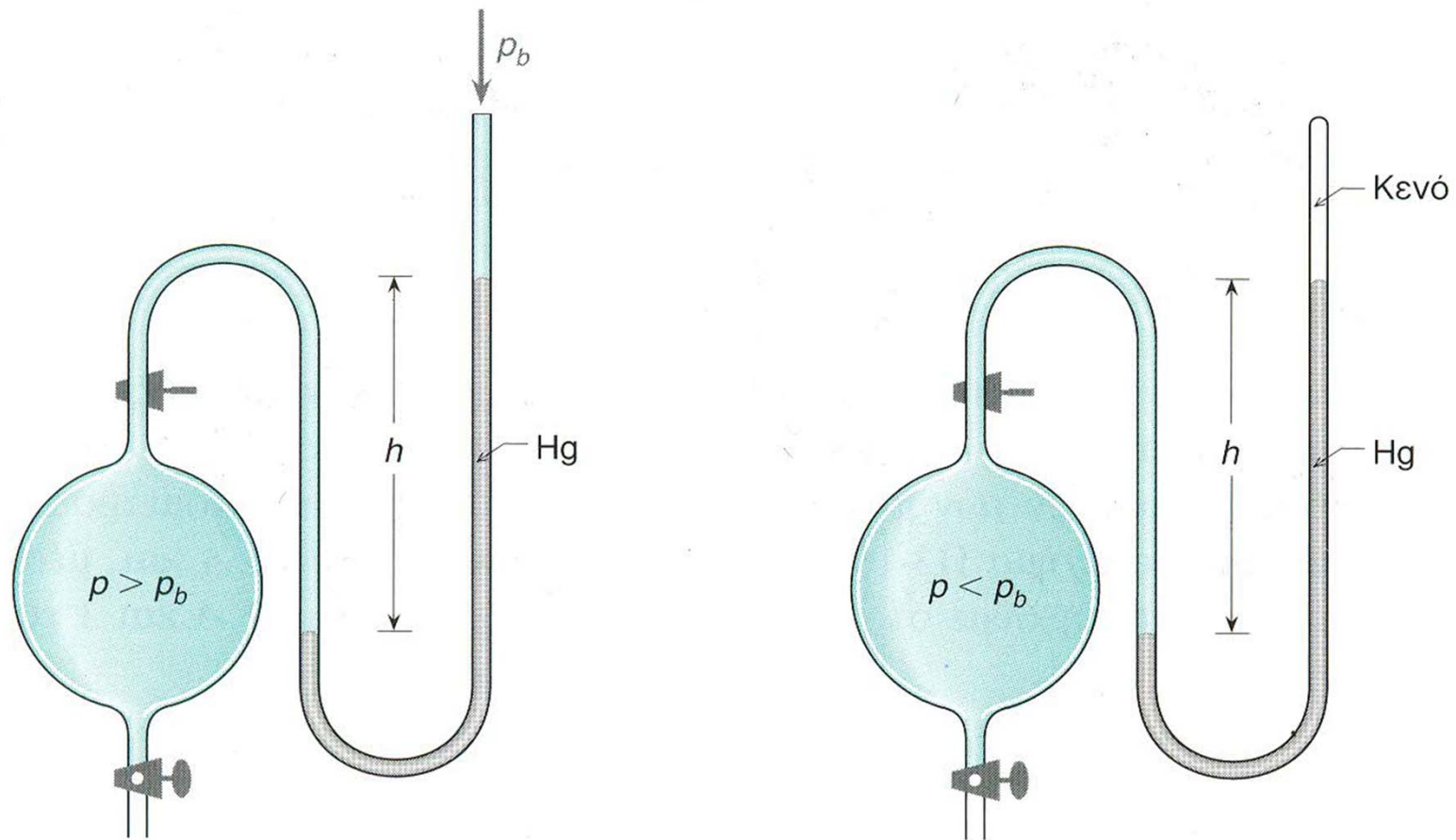
Όργανα μέτρησης Πίεσης

- Μανόμετρα Bourdon

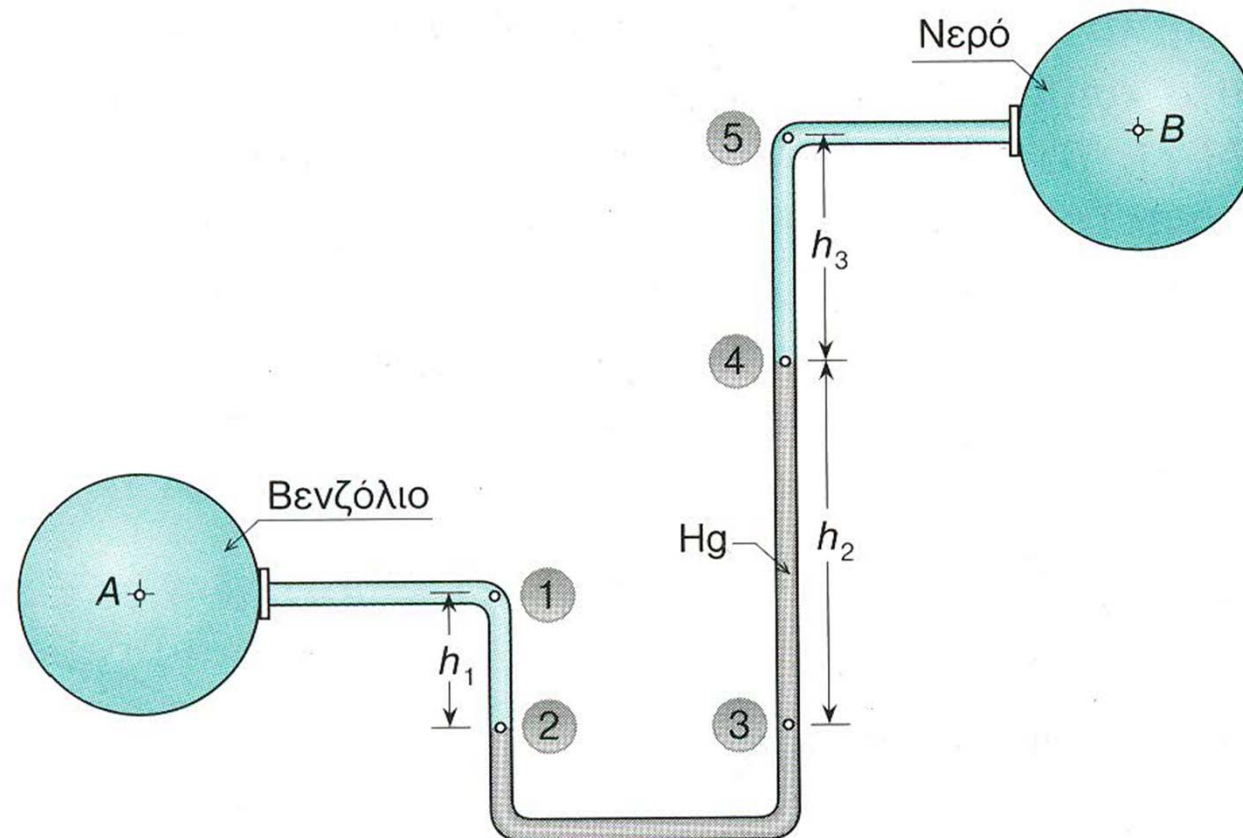


Όργανα μέτρησης Πίεσης

- Ανοιχτά και κλειστά Μανόμετρα

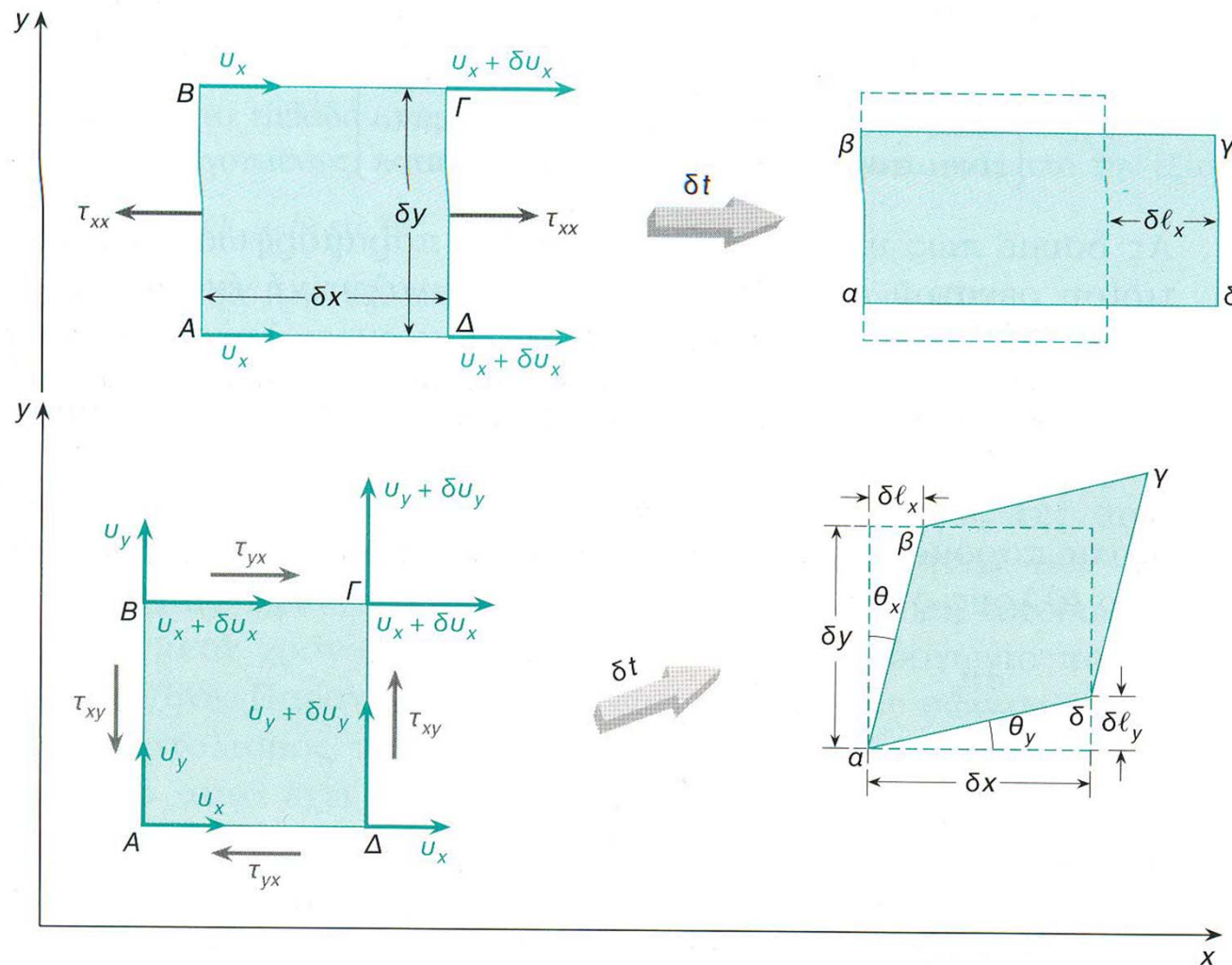


Το πρόβλημα: Δύο δεξαμενές A και B συνδέονται με ένα υδραργυρικό μανόμετρο U -Τύπου όπως φαίνεται στο Σχήμα Π3-10. Η δεξαμενή A περιέχει βενζόλιο και η δεξαμενή B νερό, θερμοκρασίας 20°C . Τα μήκη των στηλών h_1 , h_2 και h_3 είναι 15, 40 και 25 cm, αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων A και B .



Παραμόρφωση Ρευστών

- Ποια είδη παραμορφώσεων υπάρχουν και με ποιες τάσεις σχετίζονται?

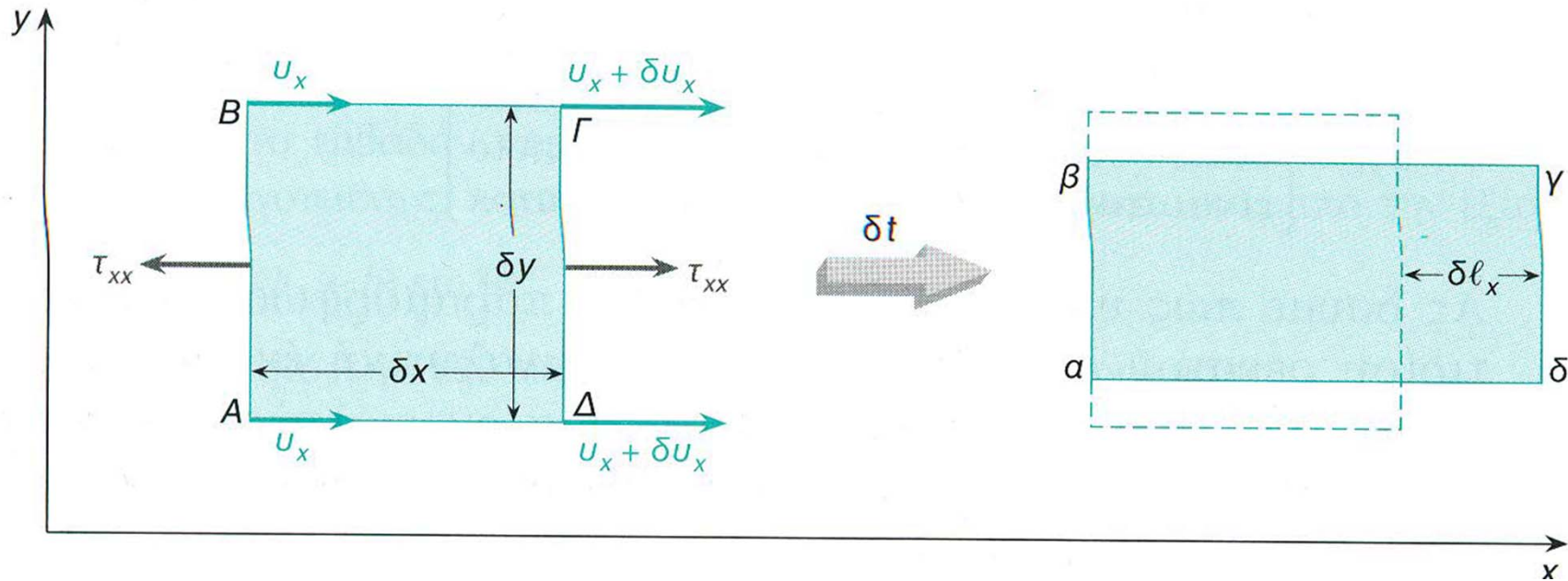


Παραμόρφωση Ρευστών

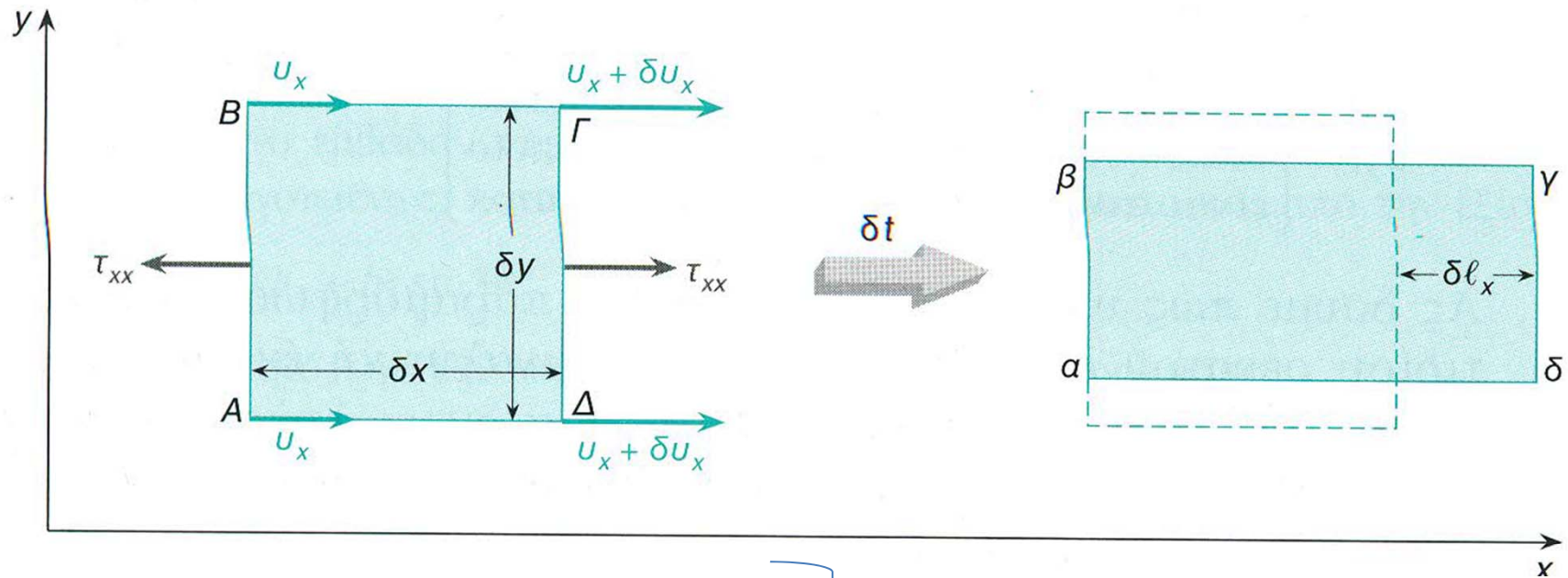
- Γραμμική παραμόρφωση
 - Εκφράζεται με το στιγμιαίο ρυθμό παραμόρφωσης

$$e_{xx} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Στιγμιαίος ρυθμός μήκυνσης ενός μονα-} \\ \text{διαίου ευθύγραμμου τμήματος το οποίο} \\ \text{είναι παράλληλο προς τη διεύθυνση } x \end{array} \right\}$$

$$e_{xx} = \lim_{\delta x, \delta y, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta \ell_x / \delta x}{\delta t} \right)$$



Παραμόρφωση Ρευστών



$$e_{xx} = \lim_{\delta x, \delta y, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta \ell_x / \delta x}{\delta t} \right)$$

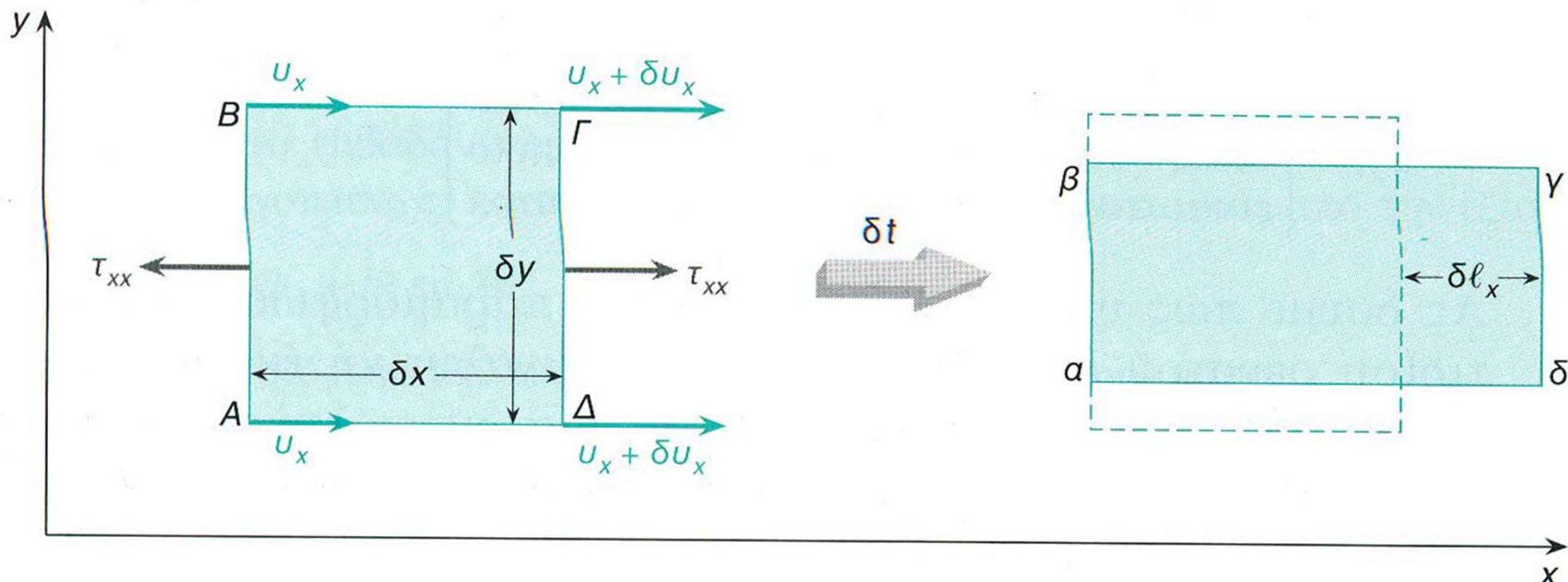
$$\delta \ell_x = (\delta v_x) (\delta t)$$

$$e_{xx} = \lim_{\delta x, \delta y, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta v_x}{\delta x} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

Παραμόρφωση Ρευστών

Ο ρυθμός παραμόρφωσης e_{xx} αντιστοιχεί στην κάθετη τάση σ_{xx}

$$e_{xx} = \lim_{\delta x, \delta y, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta v_x}{\delta x} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$



Παραμόρφωση Ρευστών

Κατά αντιστοιχία, οι κάθετες τάσεις στις άλλες διευθύνσεις αντιστοιχούν στις:

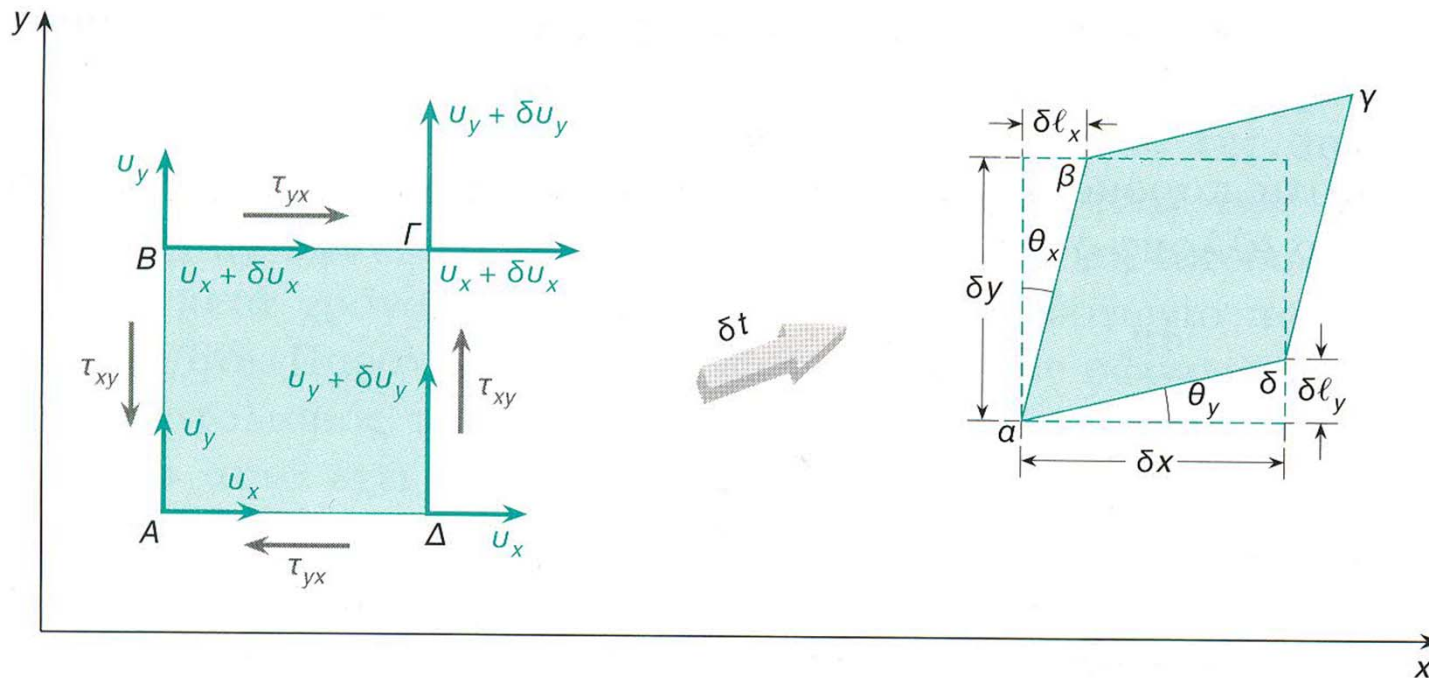
$$e_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$$e_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Παραμόρφωση Ρευστών

- Γωνιακή παραμόρφωση
 - Εκφράζεται με το στιγμιαίο ρυθμό παραμόρφωσης

$$\dot{\gamma}_{xy} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της γωνίας μεταξύ} \\ \text{δύο ευθύγραμμων τμημάτων τα οποία ήταν} \\ \text{αρχικά παράλληλα προς τις διευθύνσεις } x \text{ και } y \end{array} \right\} \quad \dot{\gamma}_{xy} = \lim_{\delta x, \delta y, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\theta_x + \theta_y}{\delta t} \right)$$



Παραμόρφωση Ρευστών

- Για πολύ μικρές γωνίες:

$$\theta_x \simeq \varepsilon\varphi\theta_x = \frac{\delta\ell_x}{\delta y} = \frac{(\delta v_x)(\delta t)}{\delta y} \qquad \theta_y \simeq \varepsilon\varphi\theta_y = \frac{\delta\ell_y}{\delta x} = \frac{(\delta v_y)(\delta t)}{\delta x}$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \lim_{\delta x, \delta y, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta v_x}{\delta y} + \frac{\delta v_y}{\delta x} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Παραμόρφωση Ρευστών

- Στις άλλες διευθύνσεις:

$$\dot{\gamma}_{xy} = \lim_{\delta x, \delta y, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta v_x}{\delta y} + \frac{\delta v_y}{\delta x} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

$$\dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Παραμόρφωση Ρευστών

Ορισμός Τανυστή
ρυθμού
παραμορφώσεων:

$$[\dot{\gamma}_{ij}] = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\gamma}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\gamma}_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\gamma}_{xx} = 2e_{xx} = 2 \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$$\dot{\gamma}_{yy} = 2e_{yy} = 2 \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

$$\dot{\gamma}_{zz} = 2e_{zz} = 2 \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\dot{\gamma}_{zx} = \dot{\gamma}_{xz} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Παραμόρφωση Ρευστών

Τανυστής ρυθμού παραμορφώσεων:

$$[\dot{\gamma}_{ij}] = \begin{bmatrix} 2e_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & 2e_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & 2e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Παραμόρφωση Ρευστών

Τανυστής ρυθμού παραμορφώσεων:

Κατά Gibbs:
$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T$$

Με δείκτες:
$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

Διαστάσεις:
$$\{\dot{\gamma}_{ij}\} = \{T^{-1}\}$$

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\dot{\gamma}_{xx} = 2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)$$

$$\dot{\gamma}_{yy} = 2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)$$

$$\dot{\gamma}_{zz} = 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$$

$$\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\dot{\gamma}_{rr} = 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)$$

$$\dot{\gamma}_{\theta\theta} = 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)$$

$$\dot{\gamma}_{zz} = 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

$$\dot{\gamma}_{r\theta} = \dot{\gamma}_{\theta r} = \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = \dot{\gamma}_{z\theta} = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)$$

$$\dot{\gamma}_{zr} = \dot{\gamma}_{rz} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$$