

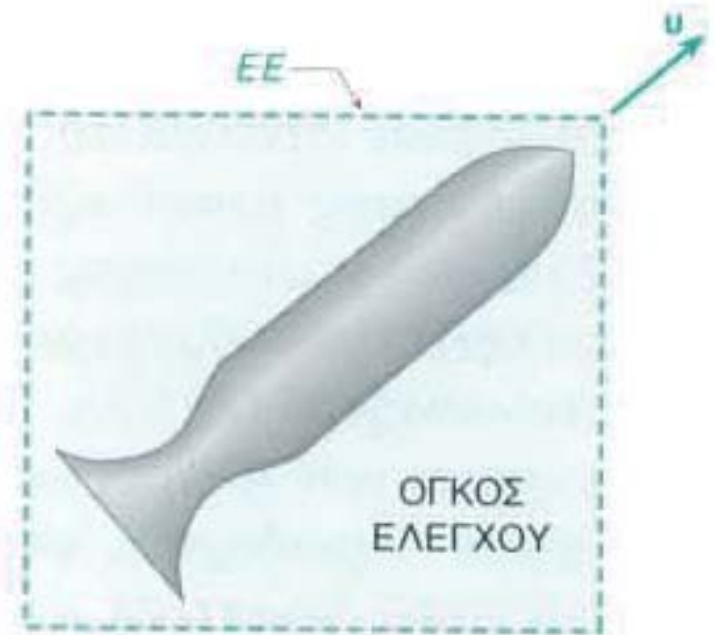
Μακροσκοπική ανάλυση ροής

6^ο Εξάμηνο Μηχανικών Επιστήμης Υλικών

Εισαγωγή

- Μακροσκοπική ανάλυση
 - Όγκος ελέγχου και νόμοι της ρευστομηχανικής
- Θεώρημα μεταφοράς
 - Εξίσωση συνέχειας
 - Εξίσωση ορμής
 - Εξίσωση ενέργειας
 - Απλοποίηση μακροσκοπικών σχέσεων
 - Μακροσκοπική εξίσωση μηχανικής ενέργειας
 - Εξίσωση Bernoulli

Εισαγωγή



Εισαγωγή

- Νόμος διατήρησης μάζας

$$\left(\frac{dm}{dt} \right)_\Sigma = 0$$

- Β' Νόμος του Νεύτωνα

$$\mathbf{F} = \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_\Sigma$$

- Νόμος διατήρησης ενέργειας

$$\dot{Q} - \dot{W} = \left(\frac{dE}{dt} \right)_\Sigma$$

Θεώρημα Μεταφοράς

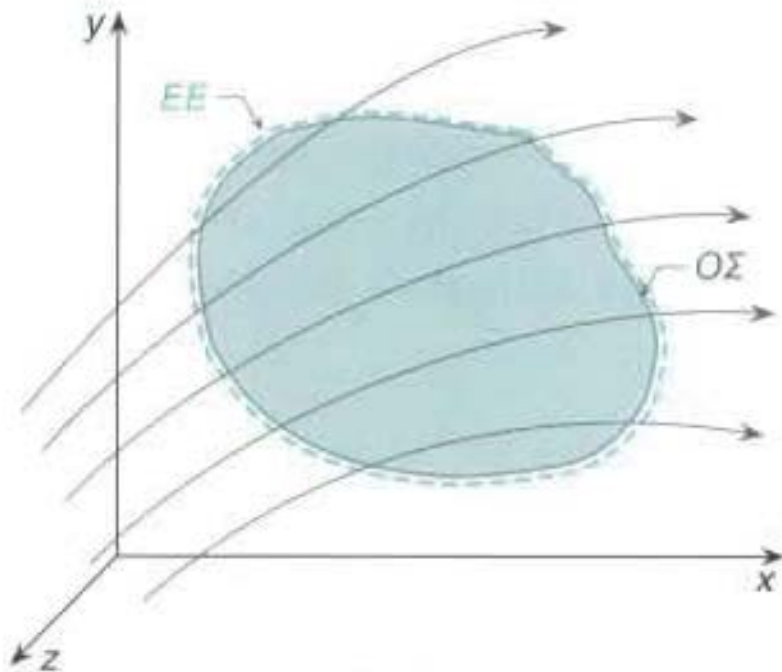
- Νόμος διατήρησης μάζας
 - Β' Νόμος του Νεύτωνα
 - Νόμος διατήρησης ενέργειας
-
- Οι μεταβολές στις εκτατικές ιδιότητες (μάζα ,
ορμή, ενέργεια) εκφράζονται στους τρεις
φυσικούς νόμους
 - Πως εκφράζονται για δεδομένο όγκο ελέγχου?

Θεώρημα Μεταφοράς

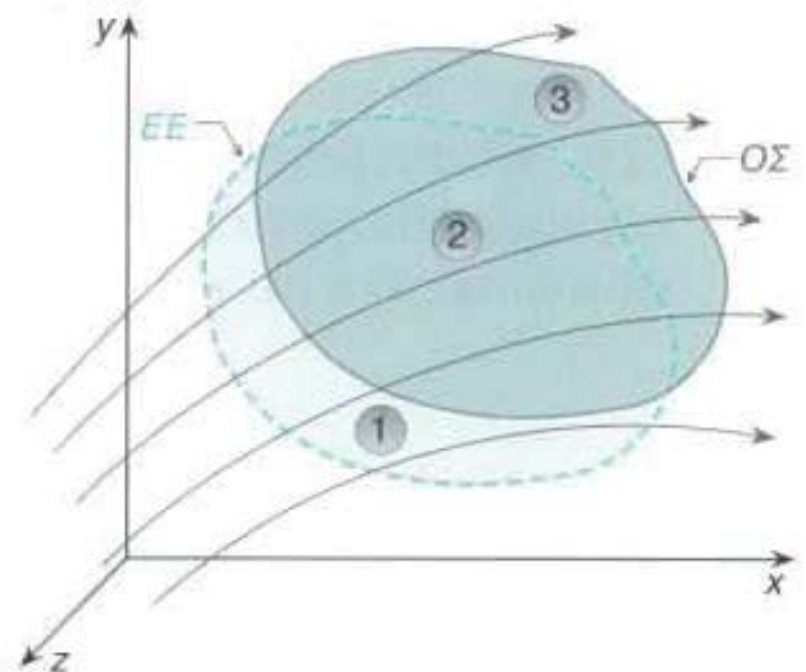
- Οι μεταβολές στις εκτατικές ιδιότητες (μάζα , ορμή, ενέργεια) εκφράζονται στους τρεις φυσικούς νόμους
 - Πως εκφράζονται για δεδομένο όγκο ελέγχου?
- Ο όγκος ελέγχου ορίζεται από μια κλειστή επιφάνεια μέσω της οποίας υπάρχει η ροή ρευστού και προκαλεί τη μεταβολή της οποιασδήποτε εκτατικής ιδιότητας ***B***

$$dB/dt$$

Θεώρημα Μεταφοράς



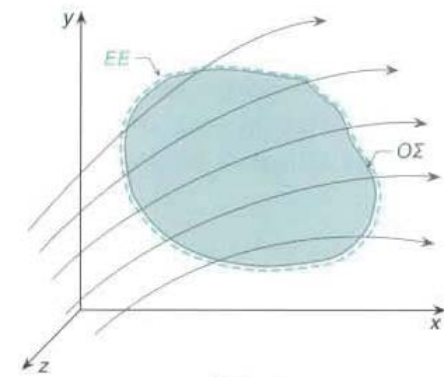
(α) $t = t_0$



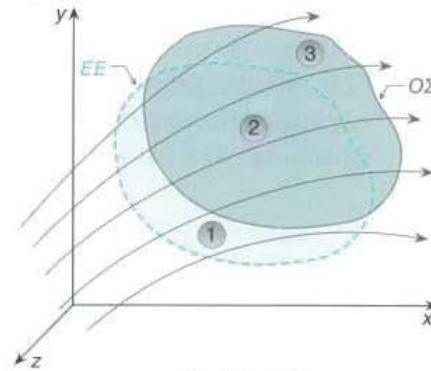
(β) $t = t_0 + \delta t$

$$dB/dt$$

Θεώρημα Μεταφοράς



(α) $t = t_0$



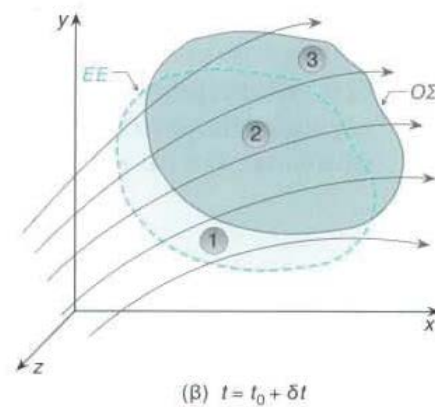
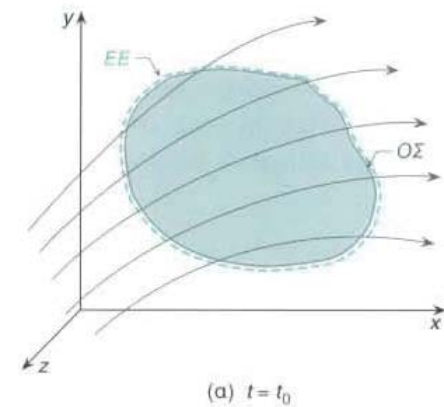
(β) $t = t_0 + \Delta t$

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{\Sigma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{t_0 + \Delta t} - B_{t_0}}{\Delta t} \right)$$

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{\Sigma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{(B_2 + B_3)_{t_0 + \Delta t} - (B_1 + B_2)_{t_0}}{\Delta t} \right)$$

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{\Sigma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{2, t_0 + \Delta t} - B_{2, t_0}}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{3, t_0 + \Delta t} - B_{1, t_0}}{\Delta t} \right)$$

Θεώρημα Μεταφοράς



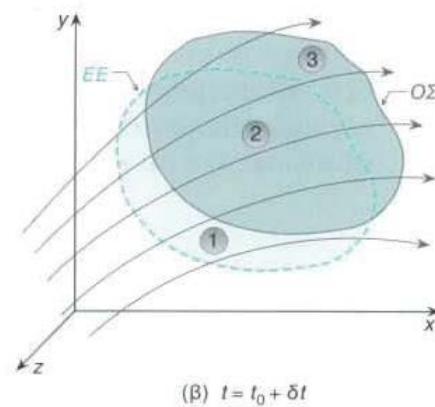
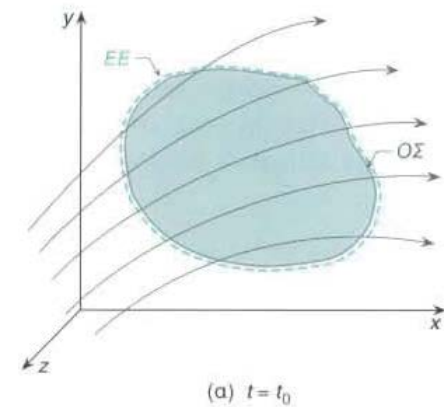
$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_\Sigma = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{2, t_0 + \delta t} - B_{2, t_0}}{\delta t} \right) + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{3, t_0 + \delta t} - B_{1, t_0}}{\delta t} \right)$$

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{2, t_0 + \delta t} - B_{2, t_0}}{\delta t} \right) = \left(\frac{dB}{dt} \right)_{OE}$$

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{2, t_0 + \delta t} - B_{2, t_0}}{\delta t} \right) = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} b \rho dV$$

Α΄ Όρος: Η μεταβολή της εκτατικής ιδιότητας του ρευστού που περιέχεται στον όγκο ελέγχου

Θεώρημα Μεταφοράς

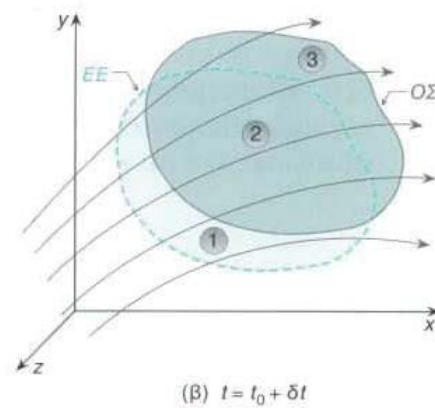
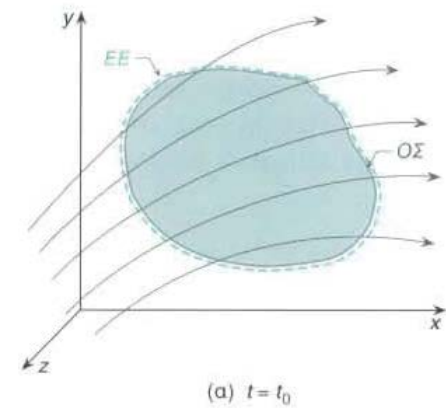


$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{\Sigma} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{2, t_0 + \delta t} - B_{2, t_0}}{\delta t} \right) + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{3, t_0 + \delta t} - B_{1, t_0}}{\delta t} \right)$$

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{3, t_0 + \delta t} - B_{1, t_0}}{\delta t} \right) = \oint_{\Sigma} b \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Β' Όρος: Ρυθμός καθαρής εκροής δια μέσου της επιφάνειας ελέγχου

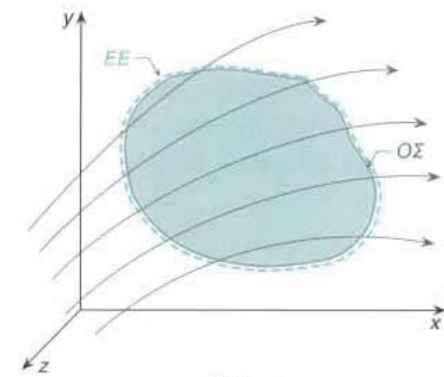
Θεώρημα Μεταφοράς



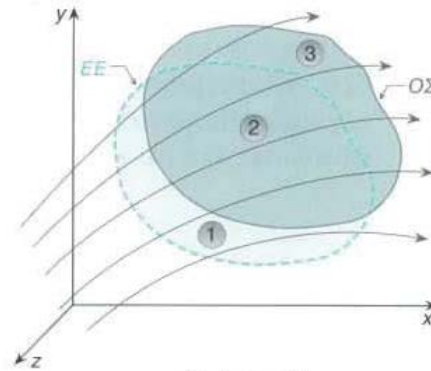
$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{\Sigma} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{2, t_0 + \delta t} - B_{2, t_0}}{\delta t} \right) + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{3, t_0 + \delta t} - B_{1, t_0}}{\delta t} \right)$$

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} b\rho \, dV + \oint_{EE} b\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA$$

Θεώρημα Μεταφοράς



(α) $t = t_0$



(β) $t = t_0 + \delta t$

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} b\rho \, dV + \oint_{EE} b\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της} \\ \text{εχτατικής ιδιότητας} \\ B \text{ του συστήματος} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της ιδιό-} \\ \text{τητας } B \text{ του ρευστού που πε-} \\ \text{ριέχεται στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής της ποσότητας } B \\ \text{από τον όγκο ελέγχου διαμέσου της επι-} \\ \text{φάνειας ελέγχου, λόγω ροής του ρευστού} \end{array} \right\}$$

Θεώρημα Μεταφοράς

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} b\rho \, dV + \oiint_{EE} b\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA$$

- Οι ιδιότητες B και b μπορούν να είναι βαθμωτά ή διανυσματικά μεγέθη
- Το πρόσημο της ποσότητας $b\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dA$ καθορίζει την εισροή ή την εκροή
- Για σταθερό όγκο ελέγχου:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{OE} b\rho \, dV = \iiint_{OE} \frac{\partial}{\partial t} (b\rho) \, dV$$

Θεώρημα Μεταφοράς

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_\Sigma = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} b\rho \, dV + \oiint_{EE} b\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA$$

- Το θεώρημα μεταφοράς εκφράζει τη στιγμή που το σύστημα και ο όγκος ελέγχου συμπίπτουν
- Για επιφάνεια ελέγχου που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{u}_s$ ο κινούμενος παρατηρητής που κινείται με την ίδια ταχύτητα βλέπει το ρευστό να εξέρχεται από την επιφάνεια ελέγχου με ταχύτητα $\mathbf{u}_r$:

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u} - \mathbf{u}_s$$

- (όπου $\mathbf{u}$ η ταχύτητα ως προς το ακίνητο σύστημα συντεταγμένων

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_\Sigma = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} b\rho \, dV + \oiint_{EE} b\rho (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n}) \, dA$$

Μακροσκοπική εξίσωση συνέχειας

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} b\rho \, dV + \oiint_{EE} b\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA$$

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} \rho \, dV + \oiint_{EE} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA$$

Από τον ορισμό του συστήματος η μάζα είναι σταθερή:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{OE} \rho \, dV + \oiint_{EE} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA = 0$$

Μακροσκοπική εξίσωση συνέχειας

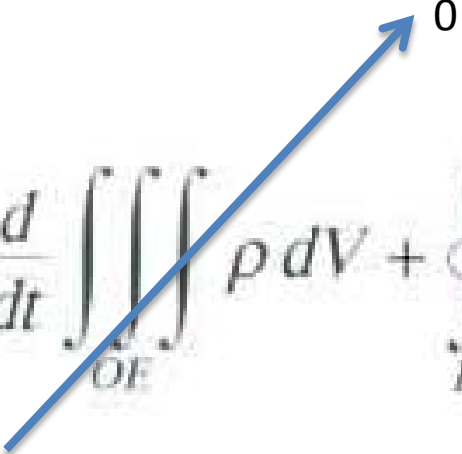
Από τον ορισμό του συστήματος η μάζα είναι σταθερή:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{OF} \rho dV + \oiint_{EE} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της μάζας} \\ \text{του ρευστού που περιέχεται} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής μάζας} \\ \text{από τον όγκο ελέγχου διαμέσου της} \\ \text{επιφάνειας ελέγχου, λόγω ροής} \\ \text{του ρευστού} \end{array} \right\} = 0$$

Μακροσκοπική εξίσωση συνέχειας

- Ειδικές μορφές:
 - ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ


$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho dV + \oiint_{\partial\Omega} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

$$\oiint_{\partial\Omega} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

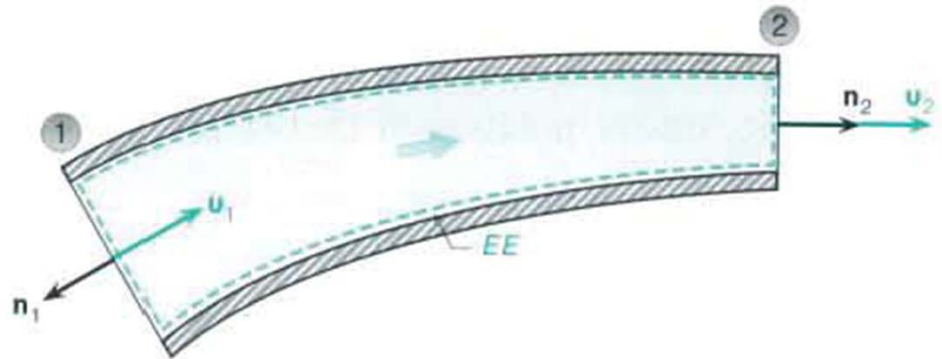
Μακροσκοπική εξίσωση συνέχειας

- Ειδικές μορφές:
 - ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟ

$$\iint_{A_1} \rho_1 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1) dA_1 + \iint_{A_2} \rho_2 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA_2 = 0$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = -v_1$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = v_2$$



$$\iint_{A_1} \rho_1 v_1 dA_1 = \iint_{A_2} \rho_2 v_2 dA_2$$

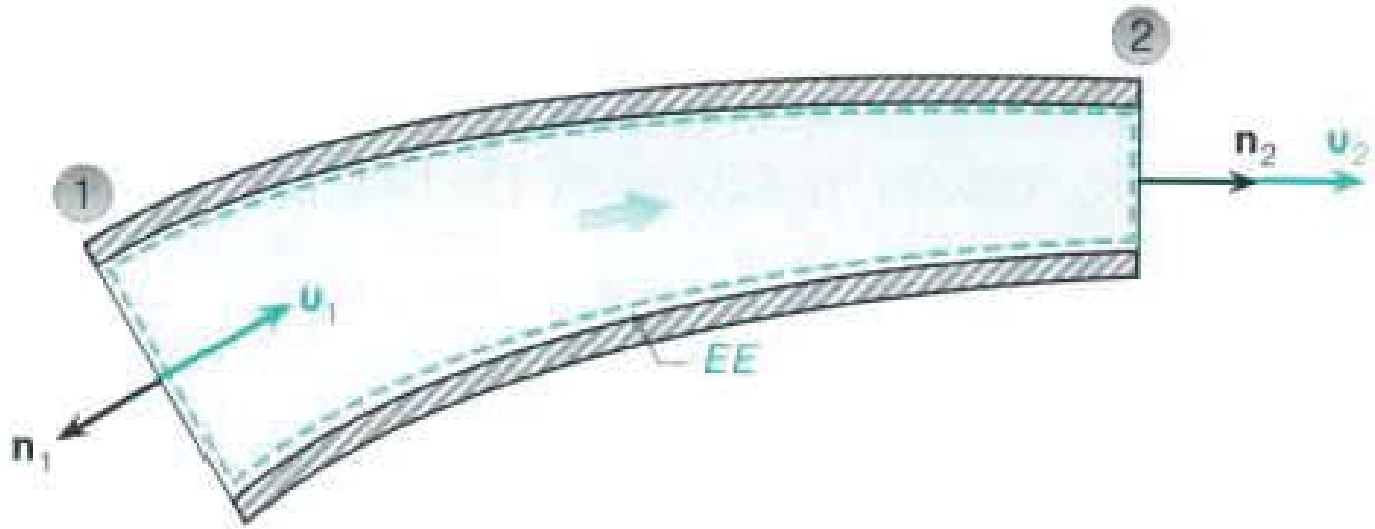
Μακροσκοπική εξίσωση συνέχειας

- Ειδικές μορφές:

- ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟ

$$\iint_{A_1} \rho_1 v_1 dA_1 = \iint_{A_2} \rho_2 v_2 dA_2$$

$$\dot{m} = \iint \rho v dA = \text{σταθ.}$$



Μακροσκοπική εξίσωση συνέχειας

- Ειδικές μορφές ροής:
 - ΜΟΝΙΜΗ
 - ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ

$$\dot{m} = \iint_A \rho v dA = \text{σταθ.}$$

Ορίζοντας τη μέση ταχύτητα και τη μέση πυκνότητα σε κάθε διατομή:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{A} \iint_A \rho dA$$

$$\bar{v} = \frac{1}{A} \iint_A (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \dot{m}$$

Μακροσκοπική εξίσωση συνέχειας

- Ειδικές μορφές ροής:
 - ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΗ $\rho = \text{σταθ.}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho \iiint_{\text{OE}} dV \right) + \rho \oiint_{\text{EE}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA &= 0 \\ \frac{d}{dt} (\rho V) + \rho \oiint_{\text{EE}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA &= 0 \end{aligned} \right\} \oiint_{\text{EE}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

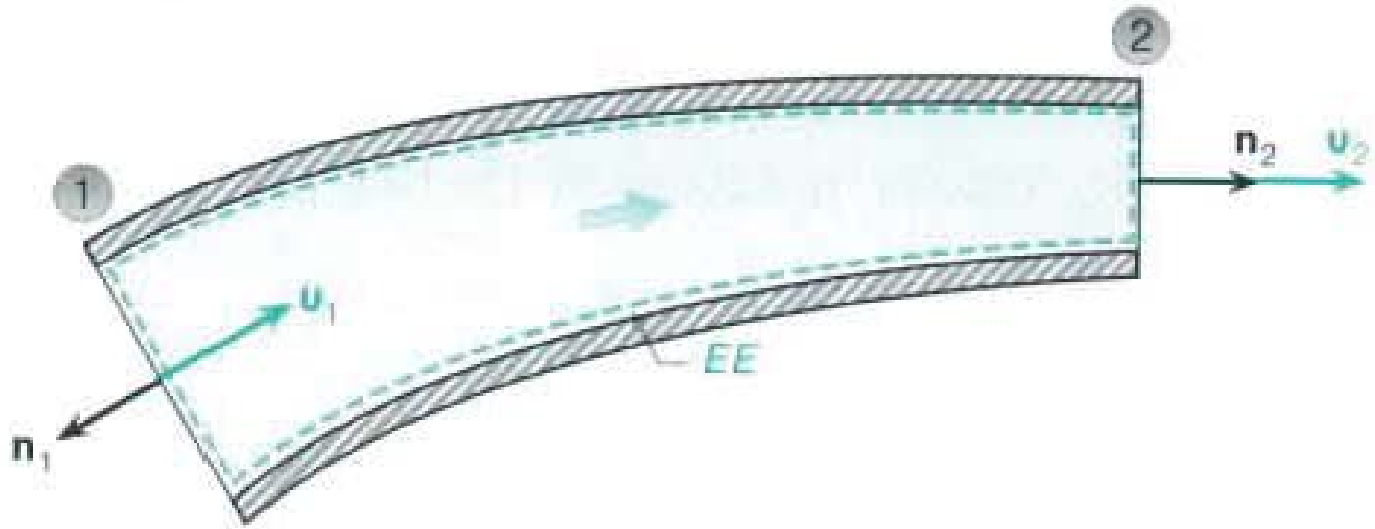
Στην ασυμπίεστη ροή ο ρυθμός καθαρής εκροής όγκου του ρευστού από τον όγκο ελέγχου είναι μηδέν

Μακροσκοπική εξίσωση συνέχειας

- Ειδικές μορφές:
 - ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟ

$$\iint_{A_1} v_1 dA_1 = \iint_{A_2} v_2 dA_2$$

$$\dot{V} = \iint_A v dA = \text{σταθ.}$$

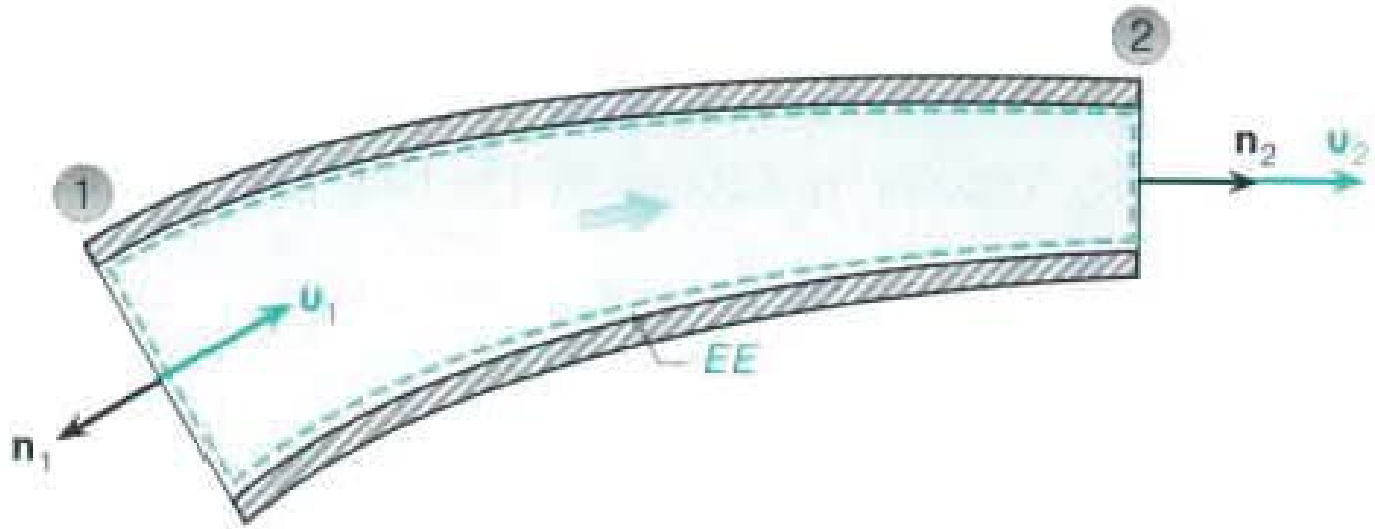


Μακροσκοπική εξίσωση συνέχειας

- Ειδικές μορφές:
 - ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΡΟΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟ

$$\dot{V} = \iint_A v \, dA = \text{σταθ.}$$

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$



Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} b\rho \, dV + \oint_{EE} b\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA$$

Εάν θέσουμε όπου B : $\mathbf{P} (= m\mathbf{v})$

$$\left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} \mathbf{v}\rho \, dV + \oint_{EE} \mathbf{v}\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής

$$\left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} \mathbf{v} \rho dV + \oiint_{EE} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$\mathbf{F} = \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_{\Sigma}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} \mathbf{v} \rho dV + \oiint_{EE} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\Sigma, t_0} = \mathbf{F}_{OE, t_0}$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \iiint_{\text{OE}} \mathbf{v} \rho dV + \oint_{\text{EE}} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Άθροισμα όλων των δυνάμεων} \\ \text{που δρουν πάνω στον όγκο} \\ \text{ελέγχου από το περιβάλλον του} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της ορ-} \\ \text{μής του ρευστού που πε-} \\ \text{ριέχεται στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής ορμής από} \\ \text{τον όγκο ελέγχου διαμέσου της επιφά-} \\ \text{νειας ελέγχου, λόγω ροής του ρευστού} \end{array} \right\}$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} \mathbf{v} \rho dV + \oiint_{EE} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$F_x = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} v_x \rho dV + \oiint_{EE} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$F_y = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} v_y \rho dV + \oiint_{EE} v_y \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$F_z = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} v_z \rho dV + \oiint_{EE} v_z \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} \mathbf{v} \rho dV + \oiint_{EE} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Σε συμπυκνμένη μορφή:

$$F_i = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} v_i \rho dV + \oiint_{EE} v_i \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$i = x, y, z.$$

Το πρόσημο της δύναμης εξαρτάται από το πρόσημο της ταχύτητας και του $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$

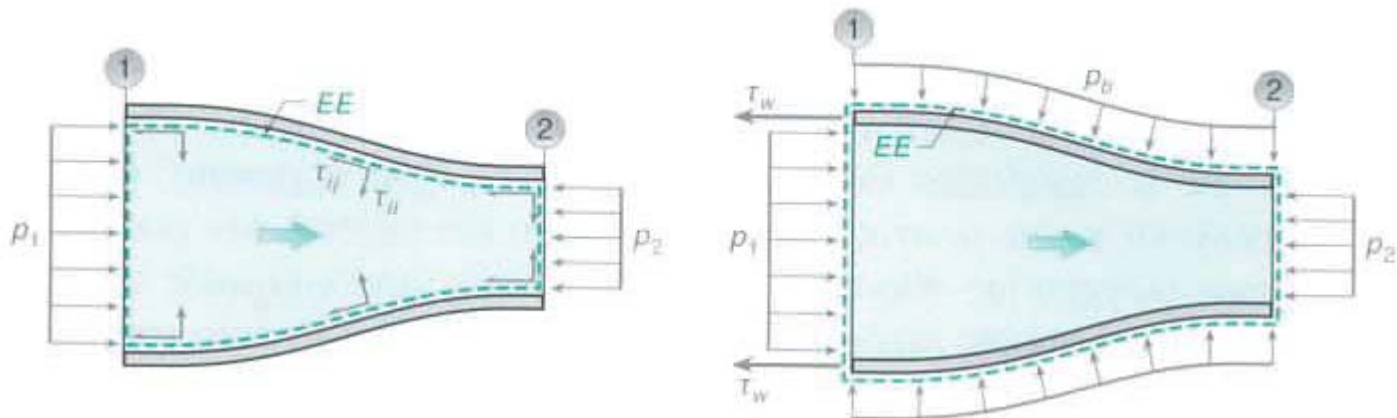
Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής

Είδη εξωτερικών δυνάμεων:

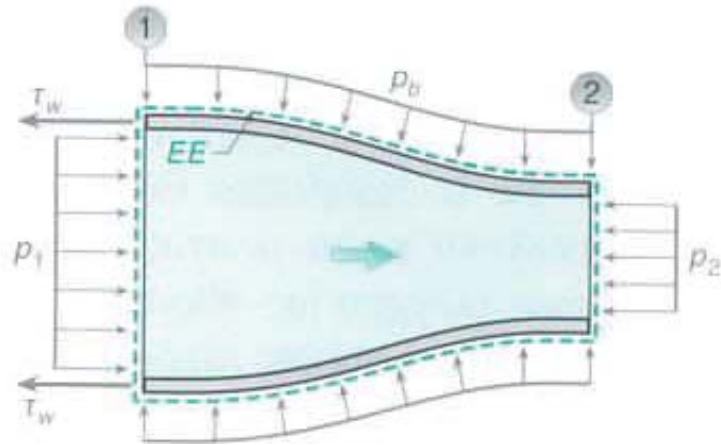
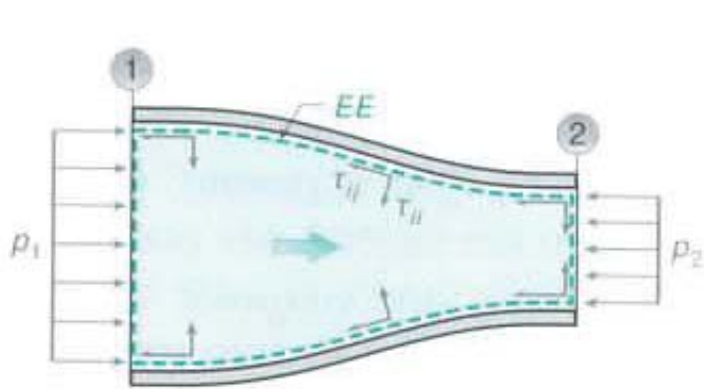
1. Σωματικές

$$\mathbf{F}_g = \iiint_{OE} \mathbf{g} \rho dV$$

2. Επιφανειακές



Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής



2. Επιφανειακές

α) Η EE δεν τέμνει στερεά:

$$\mathbf{F}_p = \oint_{EE} (-\mathbf{n})p dA$$

Δυνάμεις πίεσης

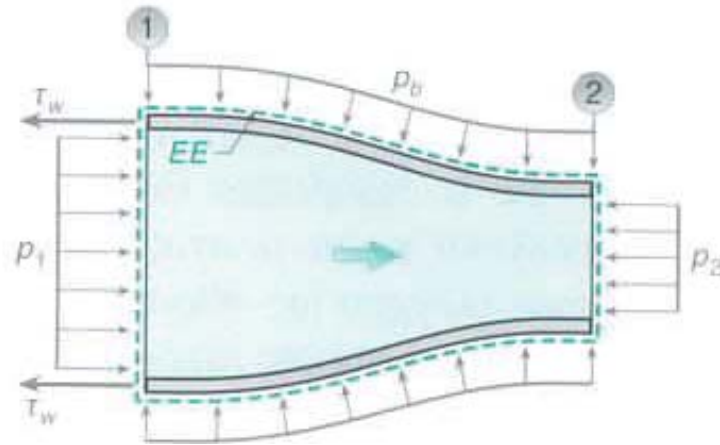
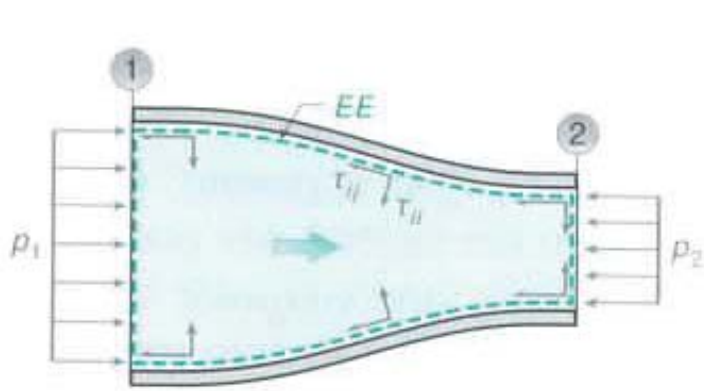
$$\mathbf{F}_\tau = \oint_{EE} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) dA$$

Δυνάμεις ιξώδους

Συνισταμένη:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\tau$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής



2. Επιφανειακές

β) Η ΕΕ τέμνει στερεά:

$$\mathbf{F}_p = \iint_{EE} (-\mathbf{n}) p dA$$

Δυνάμεις πίεσης

$\mathbf{F}_w$ (ελεύθερου σώματος)

Δυνάμεις Στήριξης

$$\mathbf{F}_{p_b} = \iint_{A_s} (-\mathbf{n}) p_b dA$$

Δυνάμεις
ατμοσφαιρικής πίεσης

Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής

Δυνάμεις πίεσης :

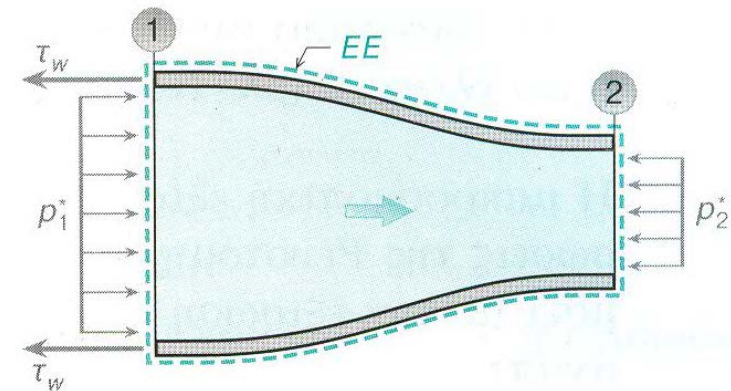
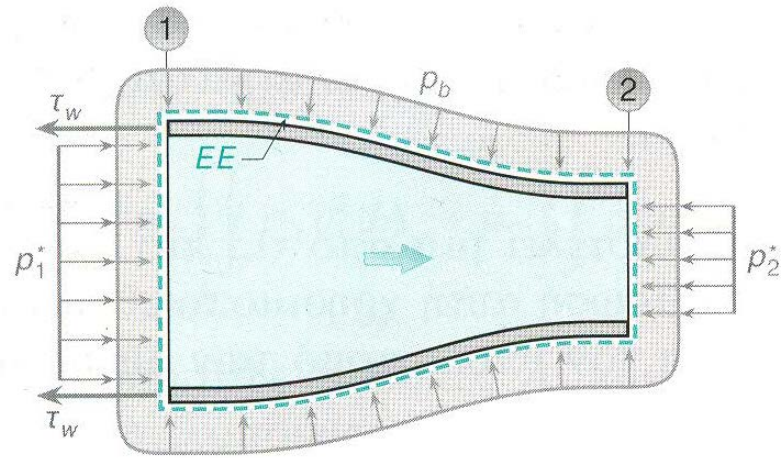
$$\mathbf{F}_p = \iint_{EE} (-\mathbf{n}) p dA$$

Η πίεση είναι σε κάθε διατομή το άθροισμα της βαρομετρικής και της μανομετρικής:

$$p = p^* + p_b$$

Αφού ασκείται άνω σε όλον τον όγκο ελέγχου, η συνισταμένη των δυνάμεων βαρομετρικής πίεσης είναι μηδέν ανεξάρτητα από το σχήμα του όγκου ελέγχου

$$\mathbf{F}_{p_b} = \iint_{EE} (-\mathbf{n}) p_b dA = \mathbf{0}$$



Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής

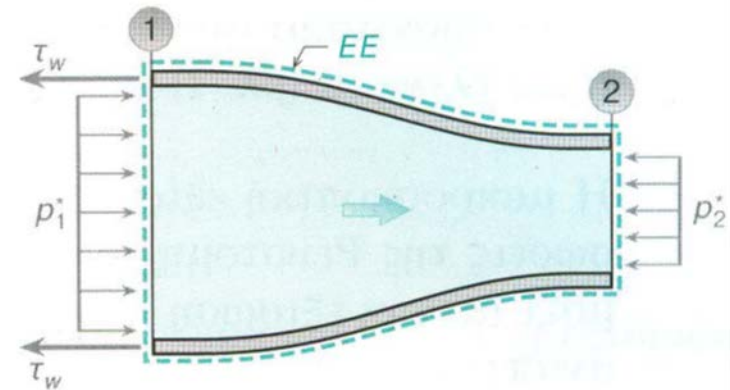
Αφού οι δυνάμεις βαρομετρικής πίεσης :

$$\mathbf{F}_{p_b} = \iint_{EE} (-\mathbf{n}) p_b dA = \mathbf{0}$$

Οι μόνες δυνάμεις πίεσης είναι οι μανομετρικές:

$$p = p^* + p_b$$

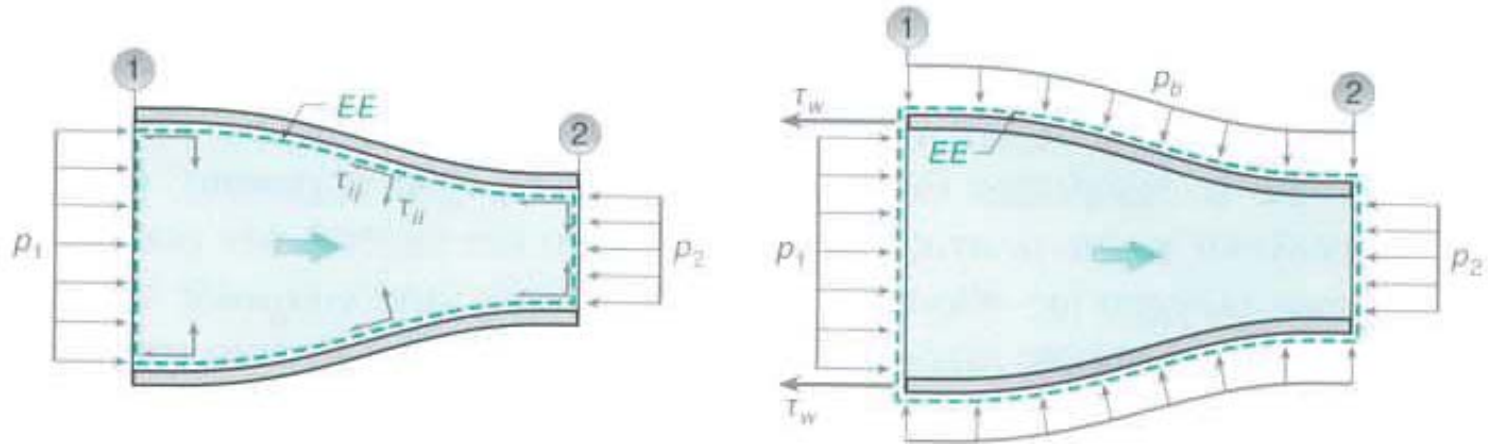
$$\mathbf{F}_{p^*} = \iint_{EE} (-\mathbf{n}) (p - p_b) dA = \iint_{EE} (-\mathbf{n}) p^* dA$$



Η συνισταμένη των δυνάμεων εάν το ρευστό τέμνει και στερεά είναι:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{p^*} + \mathbf{F}_w$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής



- Ο πίδακας ρευστού που προσκρούει στην επιφάνεια του ρευστού προκαλεί εξωτερικές δυνάμεις
- Όταν το ρευστό εκρέει στην ατμόσφαιρα, η πίεση στην έξοδο του αγωγού είναι ίση με την ατμοσφαιρική (εκτός εάν η τάση ατμών είναι σημαντική, το ρευστό εξέρχεται με υπερηχητική ταχύτητα ή είναι ιξωδοελαστικό)

Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής

Απόλυτη και σχετική ταχύτητα :

Εάν ο όγκος ελέγχου κινείται με σταθερή ταχύτητα, η ταχύτητα εισροής/εκροής ΔΕΝ ταυτίζεται με την ταχύτητα που προκαλεί τη μεταβολή της ορμής:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} \mathbf{v} \rho dV + \oiint_{EE} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_s$$

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} \mathbf{v} \rho dV + \iint_{EE} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής

Ειδικές μορφές: ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ

(η ταχύτητα και η πυκνότητα δεν μεταβάλλονται με το χρόνο)

$$\mathbf{F} = \iint_{EE} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

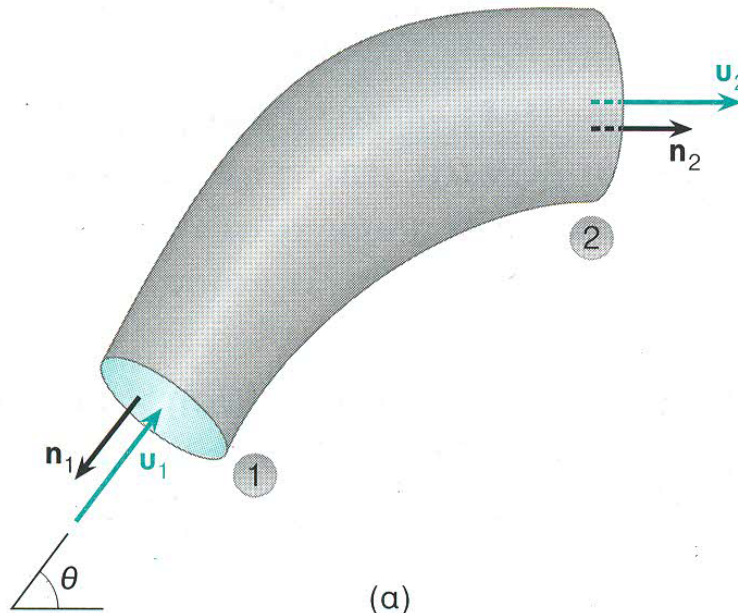
Η συνισταμένη των δυνάμεων είναι ίση με ρυθμό καθαρής εκροής ορμής

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} \mathbf{v} \rho dV + \iint_{EE} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

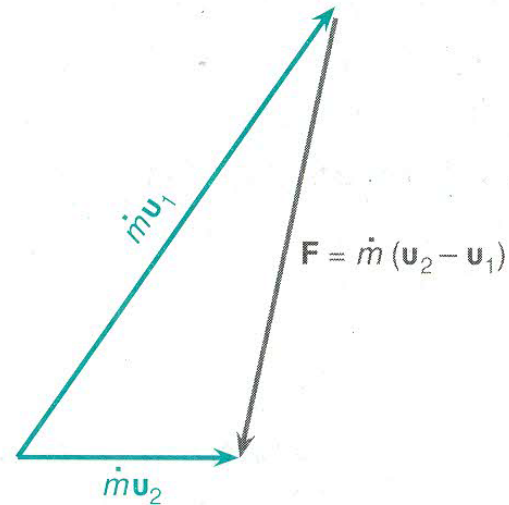
Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής

Ειδικές μορφές: ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ σε ΡΟΪΚΟ ΣΩΛΗΝΑ

(η ταχύτητα και η πυκνότητα δεν μεταβάλλονται με το χρόνο)



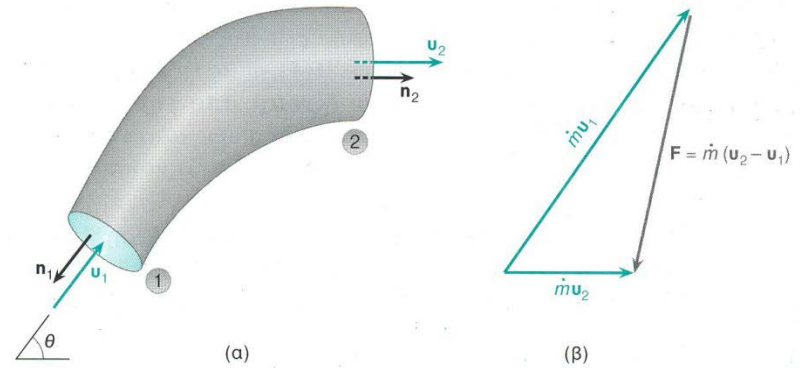
(α)



(β)

Ειδικές μορφές: ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ σε
ΡΟΪΚΟ ΣΩΛΗΝΑ

(η ταχύτητα και η πυκνότητα δεν
μεταβάλλονται με το χρόνο)



$$\mathbf{F} = \iint_{A_1} \mathbf{v}_1 \rho_1 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1) dA_1 + \iint_{A_2} \mathbf{v}_2 \rho_2 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA_2 \quad \mathbf{v}_1 = -\mathbf{n}_1 v_1 \text{ και } \mathbf{v}_2 = \mathbf{n}_2 v_2$$

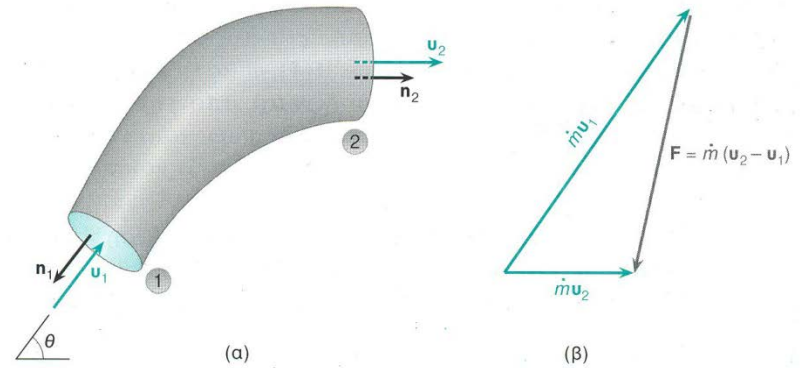
$$\mathbf{F} = \mathbf{n}_1 \iint_{A_1} \rho_1 v_1^2 dA_1 + \mathbf{n}_2 \iint_{A_2} \rho_2 v_2^2 dA_2$$

Για ομοιόμορφη ροή:

$$\mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

Ειδικές μορφές: ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ σε
ΡΟΪΚΟ ΣΩΛΗΝΑ

(η ταχύτητα και η πυκνότητα δεν
μεταβάλλονται με το χρόνο)



$$\beta = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{\bar{v}} \right)^2 dA$$

Συντελεστής διόρθωσης ορμής:

$$\iint_A \rho v^2 dA = \rho \iint_A v^2 dA = \beta(\dot{m}\bar{v}) = \beta(\rho\bar{v}A)\bar{v} = \beta\rho\bar{v}^2 A$$

$$\mathbf{F} = \dot{m} (\beta_2 \mathbf{u}_2 - \beta_1 \mathbf{u}_1)$$

Ειδικές μορφές: ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ σε
ΡΟΪΚΟ ΣΩΛΗΝΑ

(η ταχύτητα και η πυκνότητα δεν
μεταβάλλονται με το χρόνο)

ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ

$$\beta = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{\bar{v}} \right)^2 dA$$

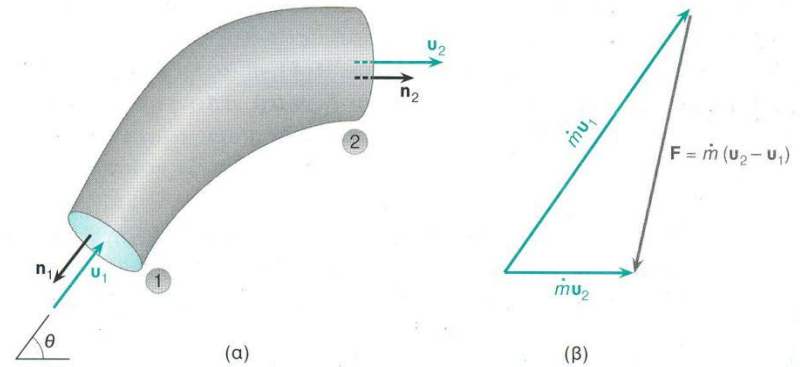
Συντελεστής διόρθωσης ορμής:

$$v = v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Κατανομή ταχύτητας



{ Για στρωτή ροή σε κυλινδρικό αγωγό }



$$\bar{v} = \frac{v_0}{2}$$

$$\beta = \frac{4}{3}$$

Ειδικές μορφές: ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ σε ΡΟΪΚΟ ΣΩΛΗΝΑ

(η ταχύτητα και η πυκνότητα δεν μεταβάλλονται με το χρόνο)

ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ

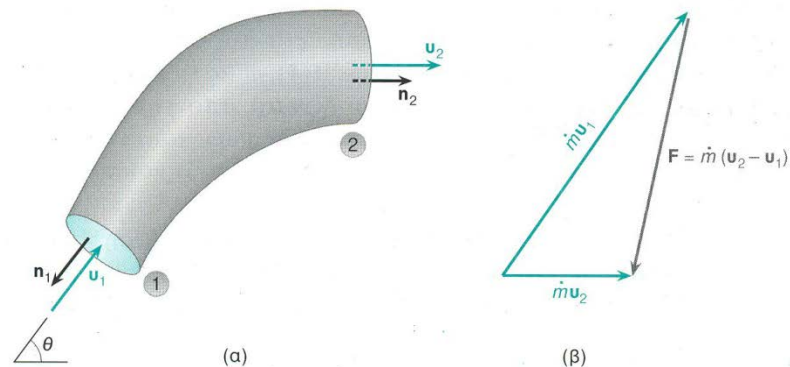
$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{\bar{v}} \right)^2 dA$$

Συντελεστής διόρθωσης ορμής:

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right)^m$$

όπου $\frac{1}{9} \leq m \leq \frac{1}{50}$

Κατανομή ταχύτητας



$$\bar{v} = \frac{2 v_0}{(1 + m)(2 + m)}$$

$$\beta = \frac{(1 + m)(2 + m)^2}{4(1 + 2m)}$$

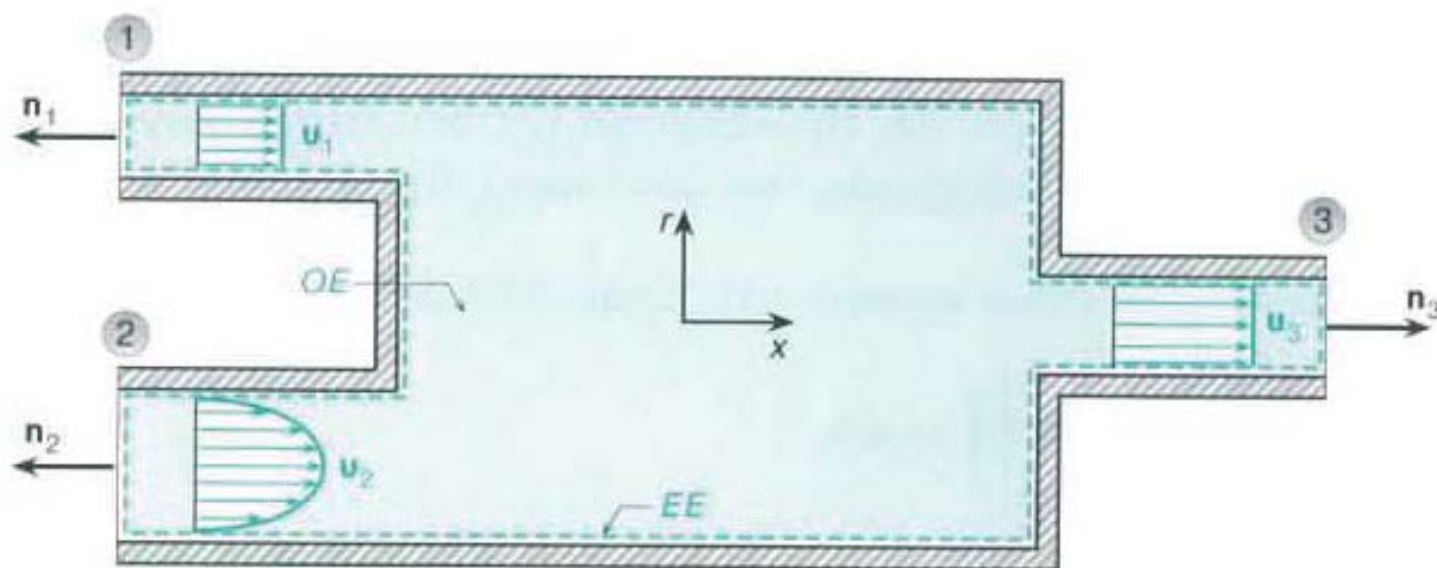
{ Για τυρβώδη ροή σε κυλινδρικό αγωγό }

m	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
β	1,037	1,027	1,020	1,016	1,013

Το πρόβλημα: Στο Σχήμα Π5-1 εικονίζεται μια δεξαμενή στην οποία εισέρχεται ένα ασυμπίεστο ρευστό από τους αγωγούς 1 και 2 και εξέρχεται από τον αγωγό 3. Και οι τρεις αγωγοί είναι κυκλικής διατομής εμβαδού 175, 700 και 350 cm², αντίστοιχα. Σε συνθήκες μόνιμης ροής, η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού στους αγωγούς 1 και 3 είναι ομοιόμορφη, ενώ στον αγωγό 2 είναι παραβολική και δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{v}_2 = v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R_2} \right)^2 \right] \mathbf{i} \quad (1)$$

όπου $v_0 = 3 \text{ m/s}$ είναι η μέγιστη ταχύτητα του ρευστού, R_2 η ακτίνα και r η απόσταση από τον άξονα του αγωγού. Αν η μέση ταχύτητα του ρευστού στον αγωγό 1 είναι $v_1 = 1,2 \text{ m/s}$, πόση είναι η μέση ταχύτητα ροής στον αγωγό 3;

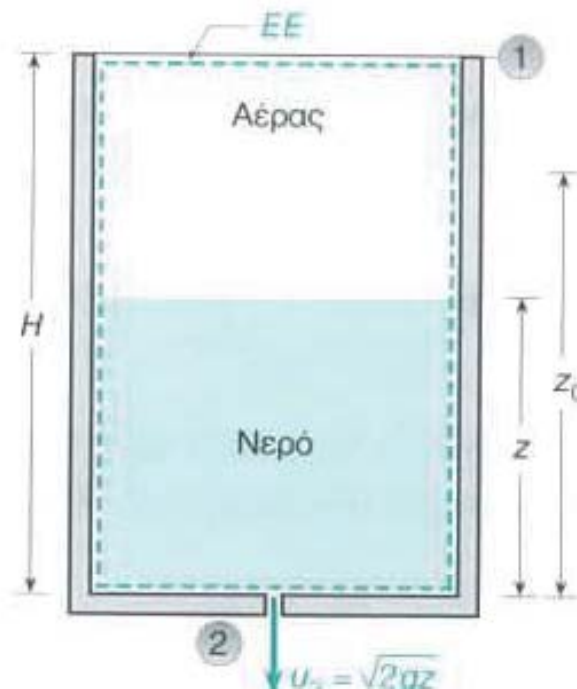


Το πρόβλημα: Στο Σχήμα Π5-2 εικονίζεται ένα κυλινδρικό δοχείο, εσωτερικής διαμέτρου 60 mm, το οποίο γεμίζεται με νερό μέχρι ύψος $z_0 = 1$ m. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το νερό αρχίζει να εξέρχεται από το δοχείο μέσω μιας οπής, διαμέτρου 5 mm, η οποία βρίσκεται στον πυθμένα του δοχείου. Η ταχύτητα εκροής, v_2 , του νερού δίνεται από την προσεγγιστική σχέση:

$$v_2 = \sqrt{2gz} \quad (1)$$

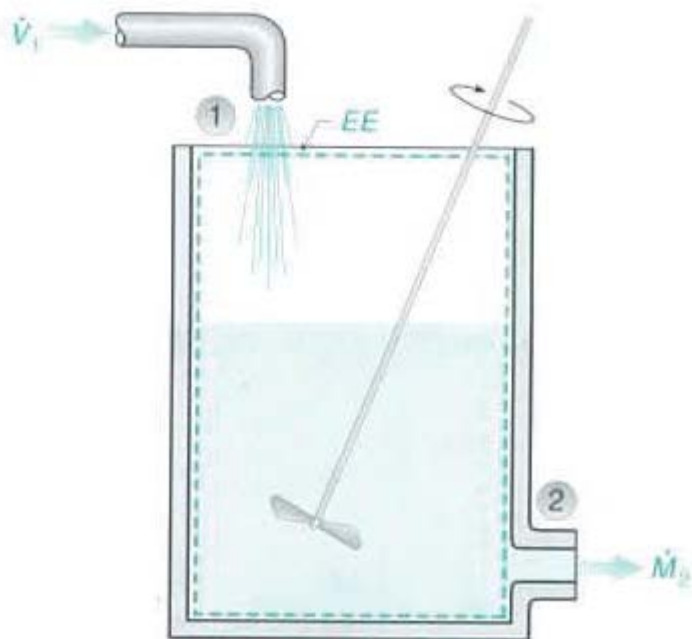
όπου g είναι η επιτάχυνση βαρύτητας και z η απόσταση της ελεύθερης επιφάνειας του νερού από τον πυθμένα του δοχείου. Να υπολογιστούν:

- Το ύψος του νερού στο δοχείο 10 sec μετά την έναρξη της εκροής του.
- Ο χρόνος που απαιτείται για την εκκένωση του δοχείου.

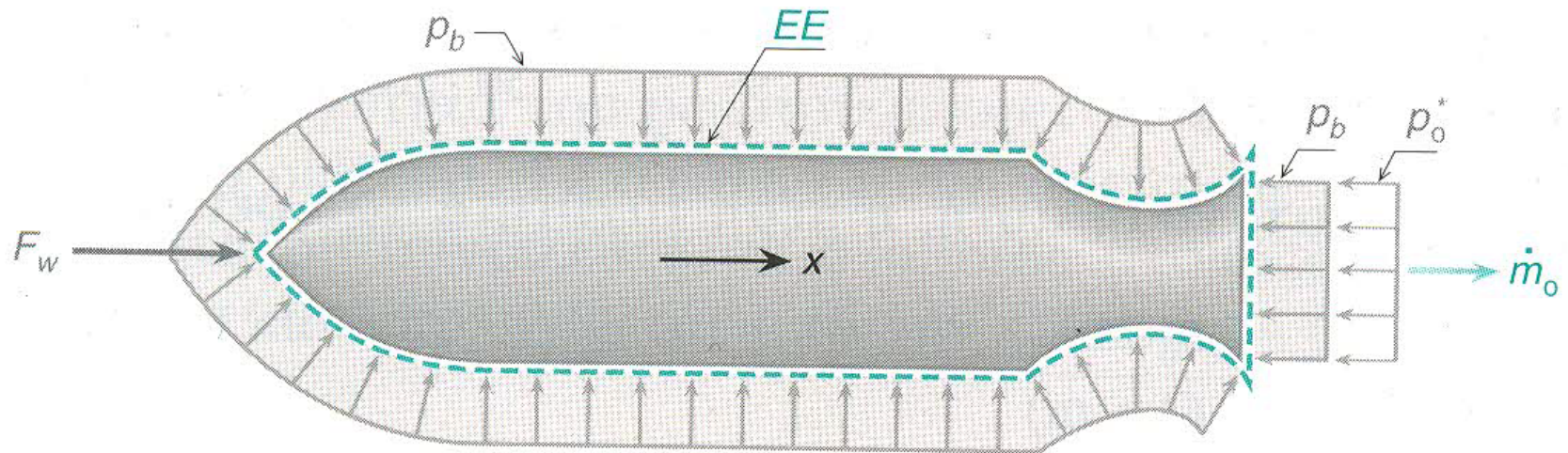


Το πρόβλημα: Σε μια δεξαμενή ανάμειξης εισέρχεται διάλυμα NaCl με σταθερή παροχή $8\ell/\text{min}$. Το διάλυμα έχει πυκνότητα $1250\text{ kg}/\text{m}^3$ και περιεκτικότητα 20% κ.β. NaCl . Κατά την έναρξη της διεργασίας ανάμειξης, η δεξαμενή περιέχει 200 kg καθαρό νερό. Η δεξαμενή διαθέτει ένα αποτελεσματικό σύστημα ανάδευσης για την πλήρη ομοιογενοποίηση του προϊόντος ανάμειξης, το οποίο εξέρχεται από τη δεξαμενή με ρυθμό $10\text{ kg}/\text{min}$.

- α. Να υπολογιστούν οι μάζες (1) του διαλύματος και (2) του NaCl που περιέχονται στη δεξαμενή 30 min μετά την έναρξη της διεργασίας ανάμειξης.
- β. Πόση είναι η μέγιστη ποσότητα NaCl που μπορεί να συσσωρευτεί στη δεξαμενή;
- γ. Πόσος χρόνος απαιτείται για την αύξηση της ποσότητας του NaCl που περιέχεται στη δεξαμενή από 10 σε 30 kg;

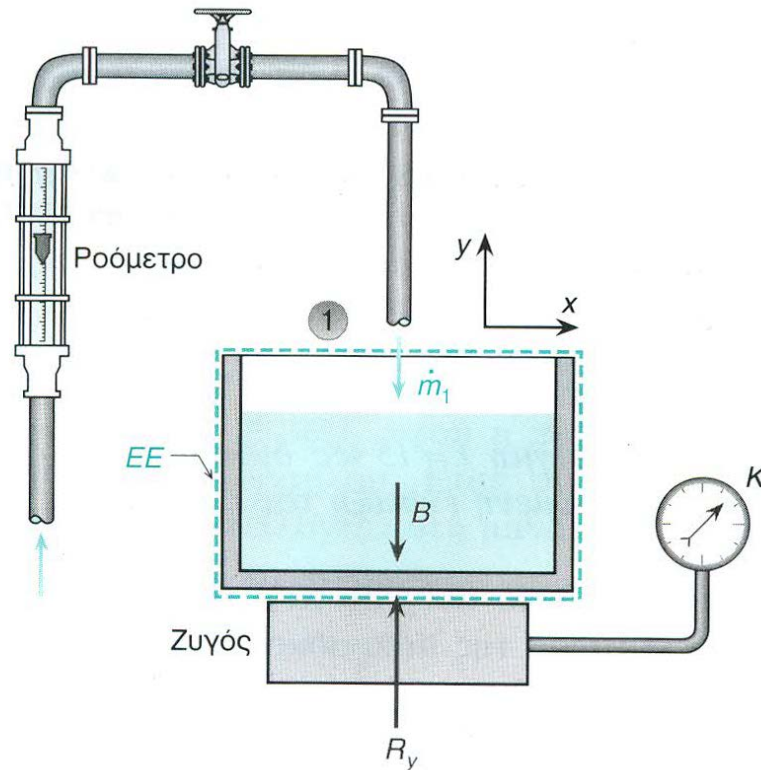


Το πρόβλημα: Για τον προσδιορισμό της προωθητικής δύναμης ενός πυραύλου εκτελείται το εξής πείραμα: Ο πύραυλος τοποθετείται σε οριζόντια θέση και μετριέται η δύναμη που απαιτείται για την ακινητοποίησή του όταν βρίσκεται σε συνθήκες εκτόξευσης. Τα αέρια εξέρχονται από τη βάση του πυραύλου, διατομής $A_0 = 400 \text{ cm}^2$, με σταθερό ρυθμό $\dot{m}_0 = 10 \text{ kg/s}$. Κατά την έξοδό τους από τον πύραυλο, τα αέρια έχουν πίεση $p_0 = 150 \text{ kPa}$ και σχετική ως προς τον πύραυλο ταχύτητα $v_0 = 1500 \text{ m/s}$. Αν η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_b = 100 \text{ kPa}$, πόση είναι η δύναμη στήριξης του πυραύλου;



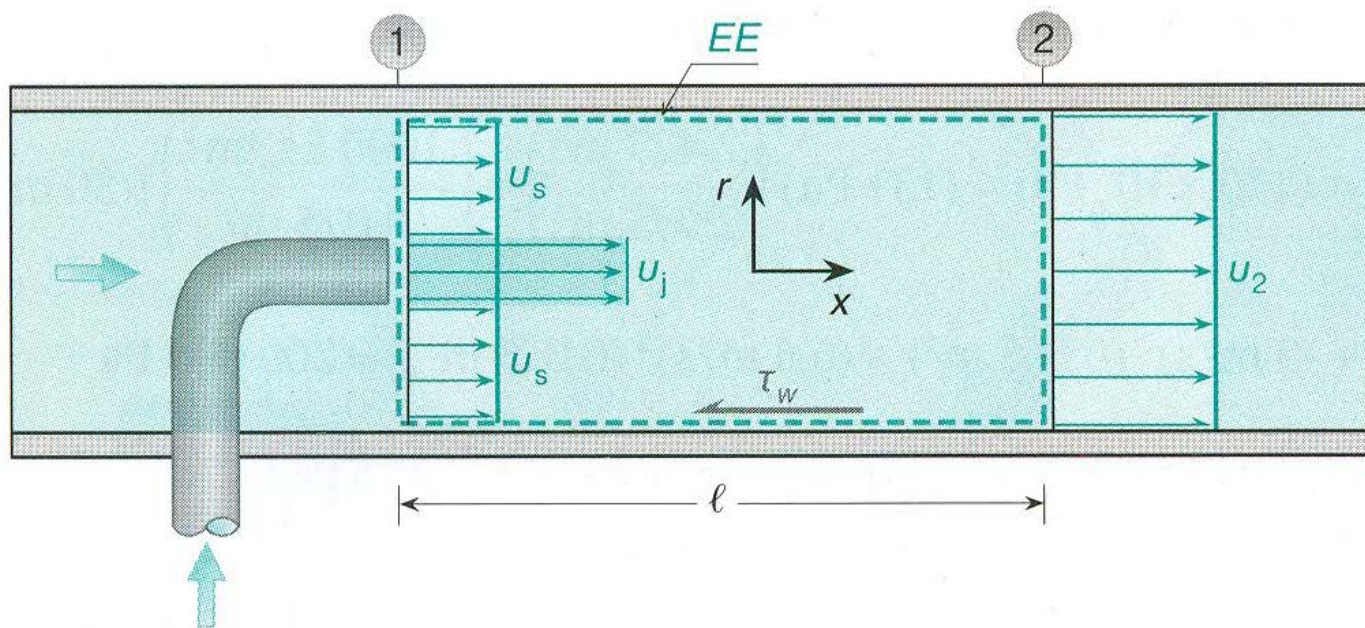
Το πρόβλημα: Για τη ρύθμιση ενός ροομέτρου χρησιμοποιείται ένα δοχείο το οποίο τοποθετείται πάνω σε ζυγό (βλ. Σχήμα Π5-5) και μετριέται η ποσότητα του νερού που συλλέγεται σε αυτό ως συνάρτηση του χρόνου. Όταν το δοχείο είναι άδειο η ένδειξη του ζυγού είναι 265 N. Το νερό πέφτει στο δοχείο κατακόρυφα, εξερχόμενο από έναν αγωγό κυκλικής διατομής, εσωτερικής διαμέτρου 5 cm, με ταχύτητα 8 m/s.

- α. Ποιά θα είναι η ένδειξη του ζυγού 15 sec μετά την έναρξη εισροής του νερού στο δοχείο;
- β. Αν τη χρονική στιγμή $t = 15 \text{ sec}$ διακοπεί η εισροή νερού στο δοχείο, θα αλλάξει η προηγούμενη ένδειξη του ζυγού;



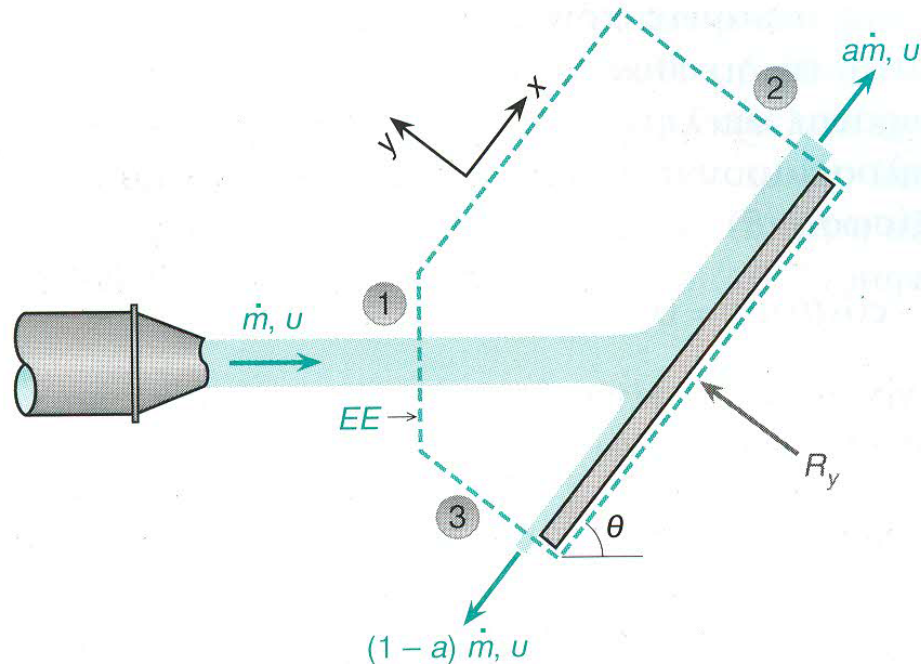
Το πρόβλημα: Στο Σχήμα Π5-6 εικονίζεται η αρχή λειτουργίας μιας υδρα-
ντλίας. Ο πίδακας νερού που εξέρχεται από το μικρό αγωγό με ταχύτητα
 $u_j = 30 \text{ m/s}$ παρασύρει το δευτερεύον ρεύμα νερού που ρέει μέσα στο μεγάλο
αγωγό με ταχύτητα $u_s = 3 \text{ m/s}$. Τα δύο ρεύματα αναμειγνύονται πλήρως και σε
απόσταση $\ell = 2,5 \text{ m}$ αποκτούν κοινή ταχύτητα u_2 . Ο μικρός αγωγός έχει εγκάρ-
σια διατομή $A_j = 0,01 \text{ m}^2$ και ο μεγάλος $A = 0,075 \text{ m}^2$. Η μέση διατμητική τάση
που αναπτύσσεται στα τοιχώματα του αγωγού μεταξύ των διατομών 1 και 2
είναι $\tau_w = 131 \text{ Pa}$. Η ροή είναι μόνιμη και ασυμπίεστη.

- α. Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα του νερού στη διατομή 2.
- β. Αν η πίεση και των δύο ρευμάτων στη διατομή 1 είναι $p_1 = 120 \text{ kPa}$, πόση
είναι η μέση πίεση του ρεύματος στη διατομή 2;



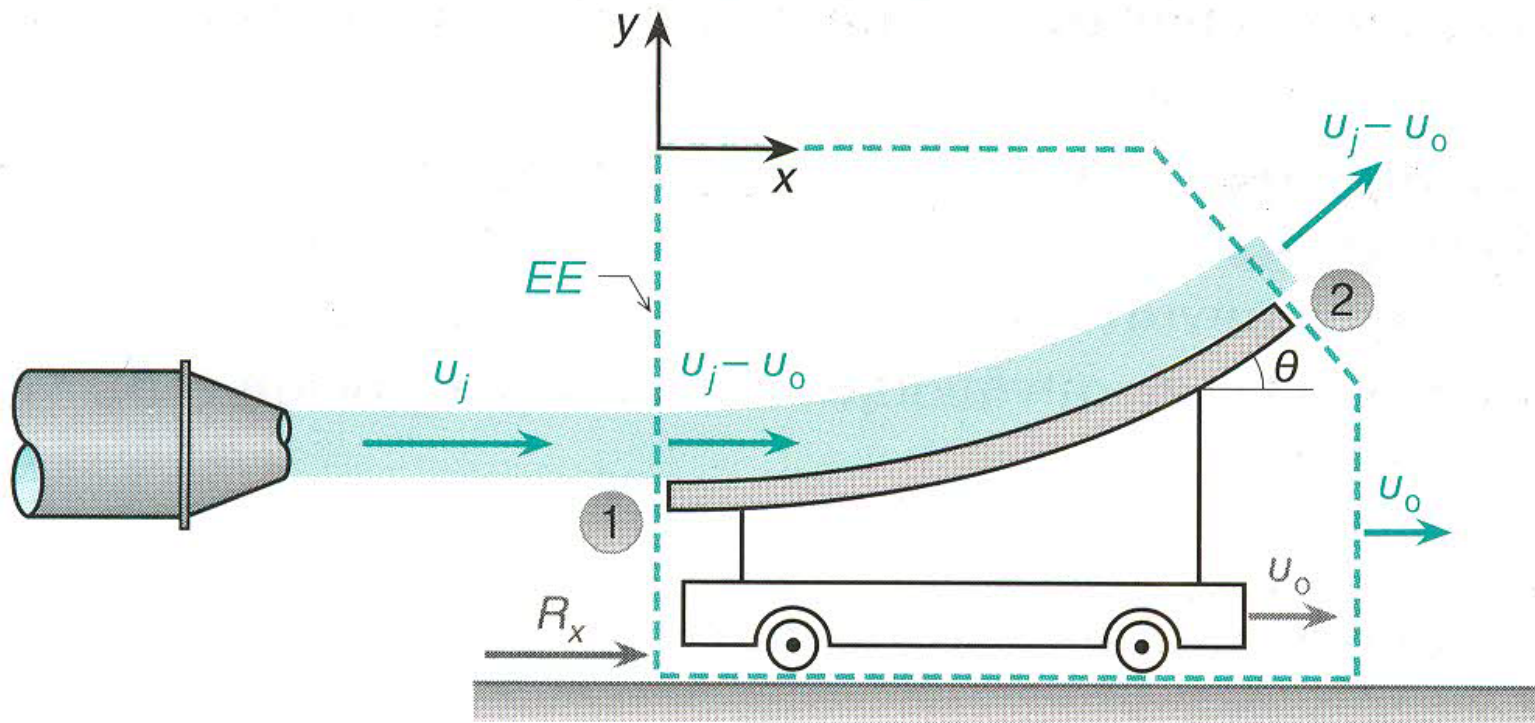
Το πρόβλημα: Ένας πίδακας νερού εξέρχεται από ένα ακροφύσιο διατομής $A_j = 0,01 \text{ m}^2$ και προσκρούει με σταθερή ταχύτητα $v_j = 10 \text{ m/s}$ πάνω σε μια επίπεδη κεκλιμένη πλάκα, γωνίας κλίσης $\theta = 60^\circ$ (βλ. Σχήμα Π5-7). Μετά την πρόσκρουσή του στην πλάκα, ο πίδακας του νερού χωρίζεται σε δύο ρεύματα τα οποία κινούνται αντίθετα, με την ταχύτητα του πίδακα. Αυτό σημαίνει ότι το νερό δεν ασκεί καμμιά εφαπτομενική δύναμη πάνω στην πλάκα. Οι ρυθμοί ροής μάζας του νερού στα ρεύματα 2 και 3 είναι $a\dot{m}$ και $(1 - a)\dot{m}$, αντίστοιχα, όπου $\dot{m}$ είναι ο ρυθμός εκροής μάζας του νερού από το ακροφύσιο και a σταθερά μικρότερη του ένα ($a < 1$). Να υπολογιστούν:

- α. Οι ρυθμοί ροής μάζας του νερού στα δύο ρεύματα.
- β. Η κάθετη δύναμη που απαιτείται για τη στήριξη της πλάκας.

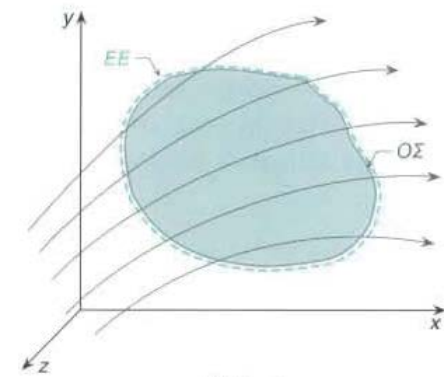


Το πρόβλημα: Ένας πίδακας νερού εξέρχεται από ένα ακροφύσιο διατομής $A_j = 0,085 \text{ m}^2$, με σταθερή ταχύτητα $v_j = 40 \text{ m/s}$ και προσπίπτει πάνω σε ένα πτερύγιο με αποτέλεσμα την αλλαγή διεύθυνσης ροής κατά γωνία $\theta = 45^\circ$ ως προς την αρχική διεύθυνση (βλ. Σχήμα Π5-8). Το πτερύγιο είναι τοποθετημένο πάνω σε ένα μικρό όχημα το οποίο κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα $u_0 = 10 \text{ m/s}$.

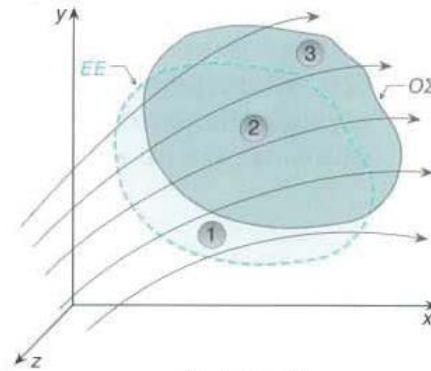
- α. Να υπολογιστεί η δύναμη την οποία ασκεί το νερό πάνω στο πτερύγιο κατά τη διεύθυνση της κίνησης του οχήματος.
- β. Πόση είναι η ισχύς που μεταφέρεται από το νερό στο πτερύγιο;
- γ. Να αποδειχθεί ότι η μεταφερόμενη ισχύς στο πτερύγιο γίνεται μέγιστη όταν το όχημα κινείται με ταχύτητα $v_j/3$.



Θεώρημα Μεταφοράς



(α) $t = t_0$



(β) $t = t_0 + \delta t$

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} b\rho \, dV + \oint_{EE} b\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της} \\ \text{εχτατικής ιδιότητας} \\ B \text{ του συστήματος} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της ιδιό-} \\ \text{τητας } B \text{ του ρευστού που πε-} \\ \text{ριέχεται στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής της ποσότητας } B \\ \text{από τον όγκο ελέγχου διαμέσου της επι-} \\ \text{φάνειας ελέγχου, λόγω ροής του ρευστού} \end{array} \right\}$$

Μακροσκοπική εξίσωση συνέχειας

Από τον ορισμό του συστήματος η μάζα είναι σταθερή:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{OF} \rho dV + \oiint_{EE} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της μάζας} \\ \text{του ρευστού που περιέχεται} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής μάζας} \\ \text{από τον όγκο ελέγχου διαμέσου της} \\ \text{επιφάνειας ελέγχου, λόγω ροής} \\ \text{του ρευστού} \end{array} \right\} = 0$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ορμής

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \iiint_{\text{OE}} \mathbf{v} \rho dV + \oint_{\text{EE}} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Άθροισμα όλων των δυνάμεων} \\ \text{που δρουν πάνω στον όγκο} \\ \text{ελέγχου από το περιβάλλον του} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της ορ-} \\ \text{μής του ρευστού που πε-} \\ \text{ριέχεται στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής ορμής από} \\ \text{τον όγκο ελέγχου διαμέσου της επιφά-} \\ \text{νειας ελέγχου, λόγω ροής του ρευστού} \end{array} \right\}$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_\Sigma = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} e \rho dV + \oint\oint_{EE} e \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

όπου e η ειδική ενέργεια:

$$E = me$$

Από το Α' θερμοδυναμικό αξίωμα:

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_\Sigma = \dot{Q} - \dot{W}$$

Ο ρυθμός απόδοσης θερμότητας **στο** σύστημα
μείον

την απόδοση έργου **από** το σύστημα είναι η μεταβολή της ενέργειας του

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\Sigma} = \dot{Q} - \dot{W}$$

Αφού το σύστημα και ο όγκος ελέγχου συμπίπτουν:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{\Sigma, t_0} = \dot{Q}_{OE, t_0}$$

$$\dot{W} = \dot{W}_{\Sigma, t_0} = \dot{W}_{OE, t_0}$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} e \rho dV + \oint_{EE} e \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Γενική μορφή μακροσκοπικής εξίσωσης ενέργειας για ακίνητο όγκο ελέγχου

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

Γενική μορφή μακροσκοπικής εξίσωσης ενέργειας για ακίνητο όγκο ελέγχου

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} e\rho dV + \oiint_{EE} e\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός πρόσδοσης θερμότητας στον} \\ \text{όγκο ελέγχου από το περιβάλ-} \\ \text{λον, λόγω διαφοράς θερμοκρασίας} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός απόδοσης έρ-} \\ \text{γου από τον όγκο ε-} \\ \text{λέγχου στο περιβάλλον} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός συσσώ-} \\ \text{ρευσης ενέργειας} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής ενέργειας από} \\ \text{τον όγκο ελέγχου διαμέσου της επιφά-} \\ \text{νειας ελέγχου, λόγω ροής του ρευστού} \end{array} \right\}$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

ΕΝΕΡΓΕΙΑ και ΕΙΔΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

$$e = e_{\delta} + e_{\kappa} + u$$

Δυναμική ενέργεια: $e_{\delta} = gZ$

Κινητική Ενέργεια: $e_{\kappa} = \frac{v^2}{2}$

Εσωτερική Ενέργεια: $u = u(\rho, T)$

$$e = u + \frac{v^2}{2} + gZ$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

Εσωτερική Ενέργεια: $u = u(\rho, T)$

Για τέλεια αέρια: $u = u(T)$

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας είναι:

$$u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v dT - \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{1}{\rho^2} \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho - p \right] d\rho$$

Και αντίστοιχα για τέλεια αέρια:

$$u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v dT$$

Ισχύει γενικά για ισόχωρες
αντιστρεπτές διεργασίες

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

Ειδική ενθαλπία: $h = u + pv$

Η μεταβολή της Ειδικής ενθαλπίας είναι:

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT - \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho} \left[1 + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right] dp$$

Και αντίστοιχα για ισοβαρείς διεργασίες ($dp=0$):

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT$$

Ισχύει γενικά για τέλεια αέρια,
όπου η ενθαλπία εξαρτάται μόνο
από τη θερμοκρασία

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ: Αγωγή

Μεταφορά ενέργειας χωρίς μακροσκοπική μεταφορά μάζας

$$\dot{\mathbf{q}}'' = -\lambda \nabla T \quad \text{Νόμος αγωγής του Fourier}$$

$\mathbf{q}''$: ρυθμός ροής θερμότητας ανά μονάδα επιφάνειας

Εισροή Θερμότητας στον ΟΕ διαμέσου της ΕΕ:

$$\dot{Q} = - \oint_{EE} (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{q}}'') dA \quad \text{ή} \quad \dot{Q} = \oint_{EE} \lambda (\mathbf{n} \cdot \nabla T) dA$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ: Μεταφορά

Μεταφορά ενέργειας με μακροσκοπική μεταφορά μάζας

- *συμπεριλαμβάνεται στην ειδική ενέργεια του ρευστού*

ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ: Ακτινοβολία

Μεταφορά ενέργειας με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία

- *Εξαρτάται από την επιφάνεια του σώματος*
- *Συνήθως θεωρείται αμελητέα στα προβλήματα*

Μηχανικής Ρευστών

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

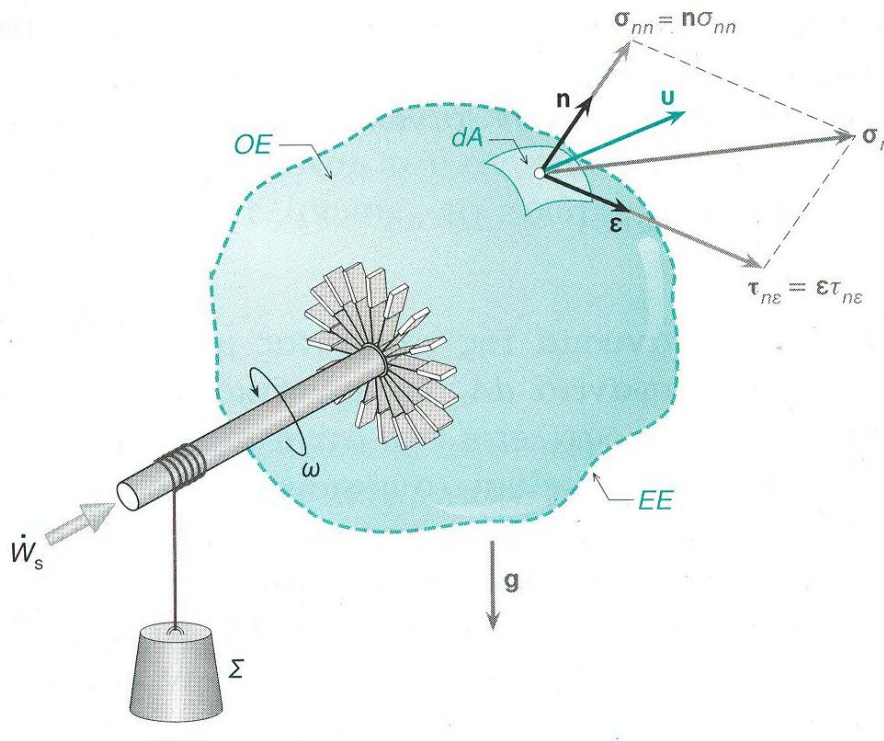
ΕΡΓΟ: $\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_\sigma$

$$[\text{έργο}] = [\text{αξονικό έργο}] + [\text{έργο επιφανειακών δυνάμεων}]$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

αξονικό έργο

- Παράγεται στον όγκο ελέγχου
- Μεταφέρεται δια μέσου της επιφάνειας ελέγχου **χωρίς** μεταφορά ρευστού



$$\dot{W}_s = \mathcal{M}\omega$$

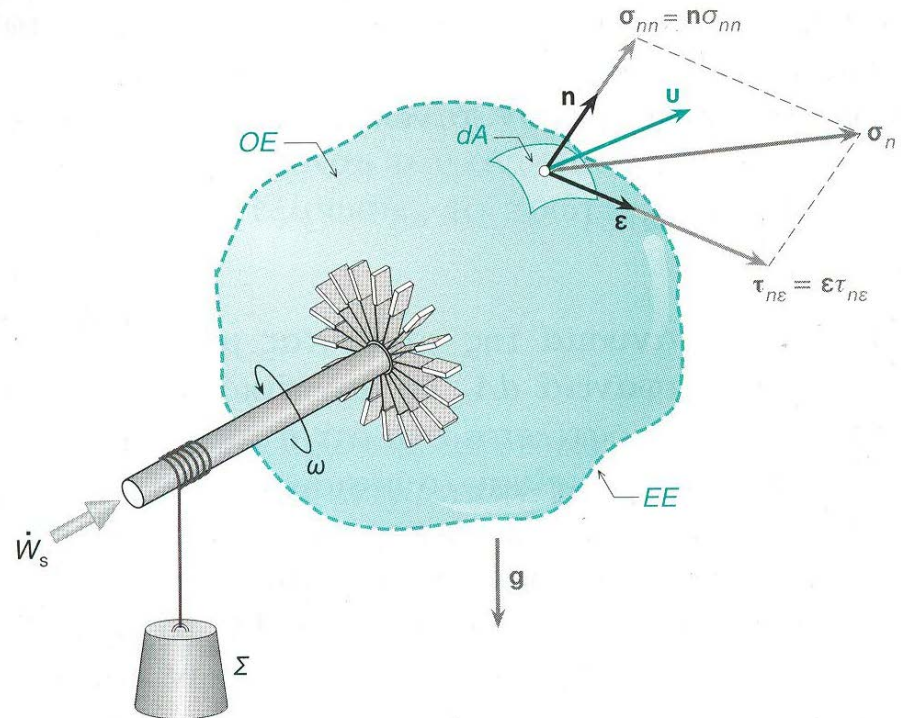
[αξονικό έργο] =
[ροπή] x [γωνιακή ταχύτητα]

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

Έργο επιφανειακών δυνάμεων

- Εξουδετερώνει τις δυνάμεις που δρουν στην EE όπου υπάρχει μεταφορά ρευστού

$$\dot{W}_\sigma = - \oint_{EE} (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v}) dA$$



Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

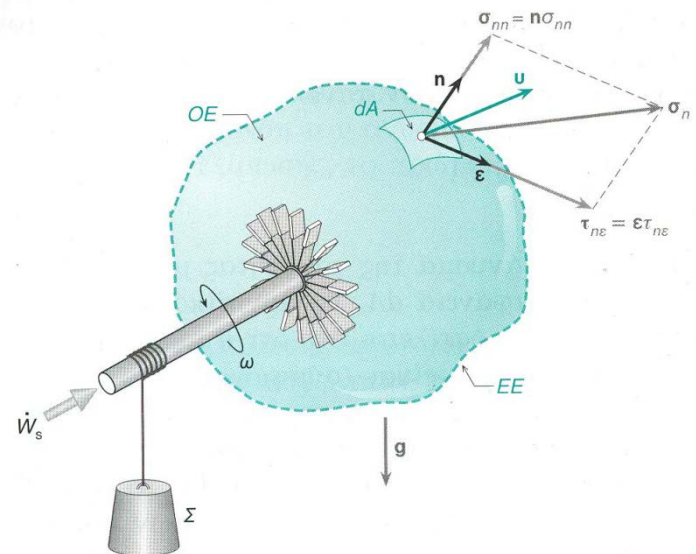
Έργο επιφανειακών δυνάμεων

➤ Κάθετες δυνάμεις: Έργο ροής

$$\dot{W}_f = - \oint_{EE} (\boldsymbol{\sigma}_{nn} \cdot \mathbf{v}) dA = - \oint_{EE} \sigma_{nn} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA$$

$$\sigma_{ij} = -p + \tau_{ij}, \quad \forall i = j$$

$$\dot{W}_f = \oint_{EE} p (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA - \oint_{EE} \tau_{nn} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA$$



Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

Έργο επιφανειακών δυνάμεων

- Κάθετες δυνάμεις: Έργο ροής

$$\dot{W}_f = \oint_{EE} p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA - \oint_{EE} \tau_{nn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA$$

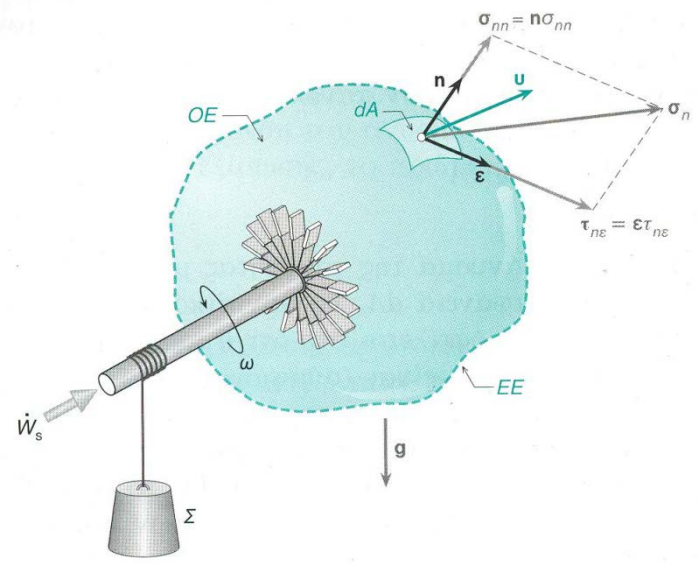
- Έργο πίεσης

$$\dot{W}_p = \oint_{EE} p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA$$

- Έργο κάθετων ιξωδών δυνάμεων

$$\dot{W}_\kappa = - \oint_{EE} \tau_{nn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA$$

(συνήθως θεωρείται αμελητέο)



Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

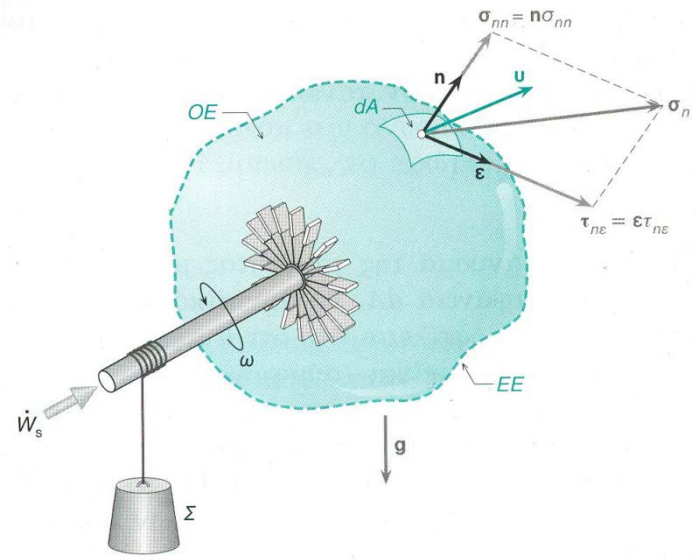
Έργο επιφανειακών δυνάμεων

➤ Εφαπτομενικές επιφανειακές δυνάμεις: Έργο διάτμησης

$$\dot{W}_\delta = - \oint_{EE} \tau_{n\varepsilon} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}) dA$$

Όπου ε είναι το παράλληλο διάνυσμα στην επιφάνεια

➤ Πότε είναι
μηδέν το Έργο διάτμησης ;



Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

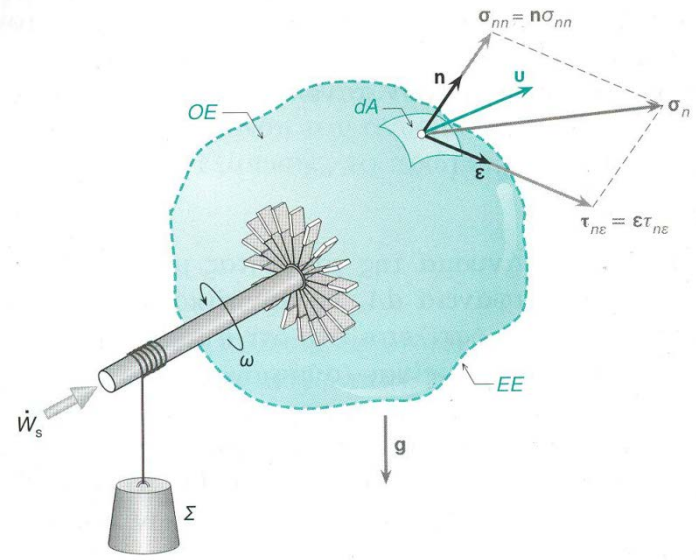
Έργο επιφανειακών δυνάμεων

➤ Εφαπτομενικές επιφανειακές δυνάμεις: Έργο διάτμησης

$$\dot{W}_\delta = - \oint_{EE} \tau_{n\varepsilon} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}) dA$$

Όπου ε είναι το παράλληλο διάνυσμα στην επιφάνεια

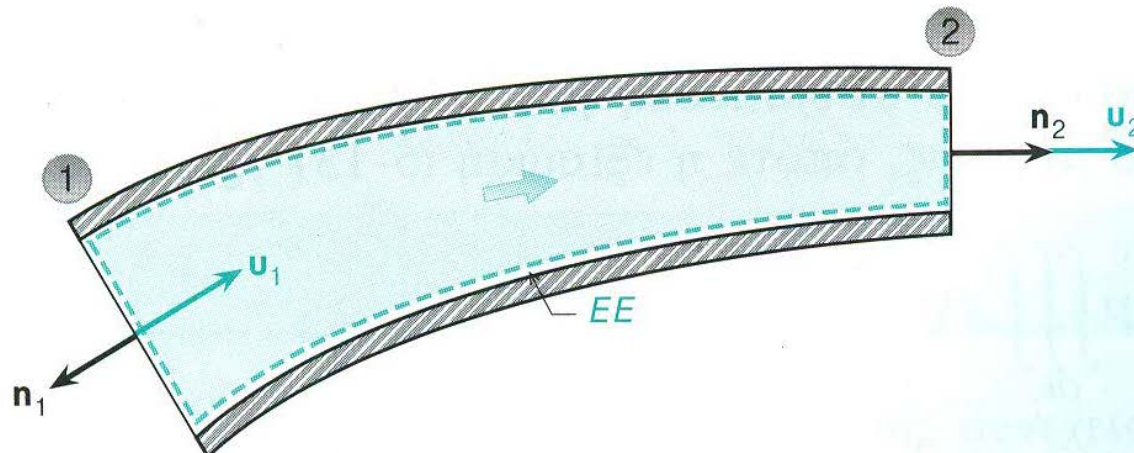
➤ Το Έργο διάτμησης είναι μηδέν όταν η επιφάνεια ροής είναι κάθετη στη ροή



Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

Έργο επιφανειακών δυνάμεων

$$\dot{W}_\delta = - \oiint \tau_{n\varepsilon} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}) dA$$



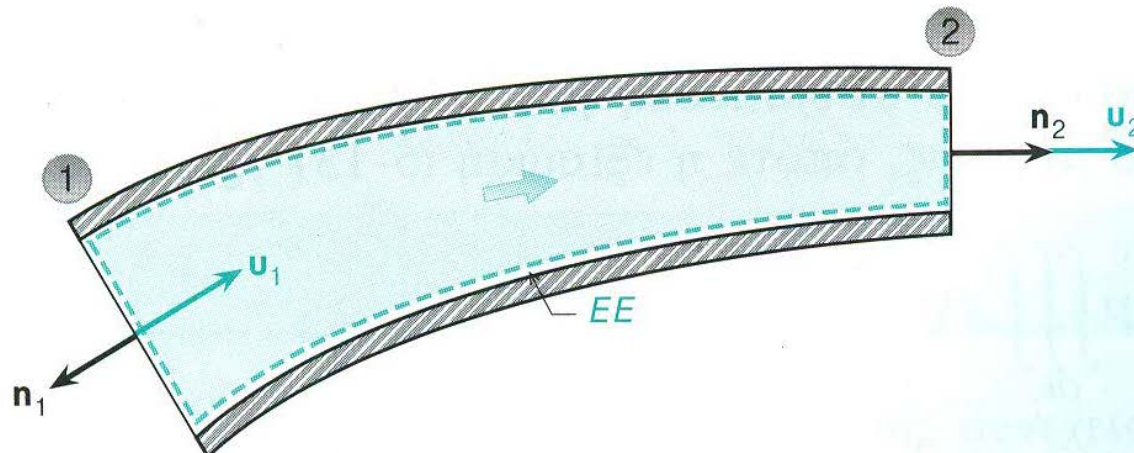
$$\dot{W}_\delta = - \iint_{A_1} \tau_{n\varepsilon} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}) dA - \iint_{A_w} \tau_{n\varepsilon} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}) dA - \iint_{A_2} \tau_{n\varepsilon} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}) dA$$

Πόσο είναι το έργο διάτμησης:

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

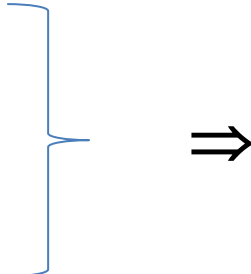
Έργο επιφανειακών δυνάμεων

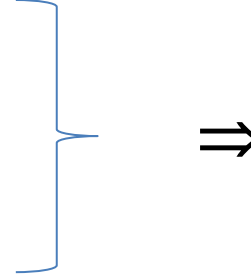
$$\dot{W}_\delta = - \iint \tau_{n\varepsilon} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}) dA$$



$$\dot{W}_\delta = - \iint_{A_1} \tau_{n\varepsilon} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}) dA - \iint_{A_w} \tau_{n\varepsilon} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}) dA - \iint_{A_2} \tau_{n\varepsilon} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}) dA = 0$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

$$\dot{W}_{\kappa} = - \iint_{EE} \tau_{nn} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA$$
$$\dot{W}_{\delta} = - \iint_{EE} \tau_{n\varepsilon} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}) dA$$


$$\dot{W}_{\tau} = \dot{W}_{\kappa} + \dot{W}_{\delta} = - \iint_{EE} (\boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{v}) dA$$

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$$

$$\dot{W}_{\tau} = - \iint_{EE} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) dA$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

Συνολικό Έργο:

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_p + \dot{W}_\tau = \dot{W}_s + \oint_{EE} \left(\frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \dot{W}_\tau$$

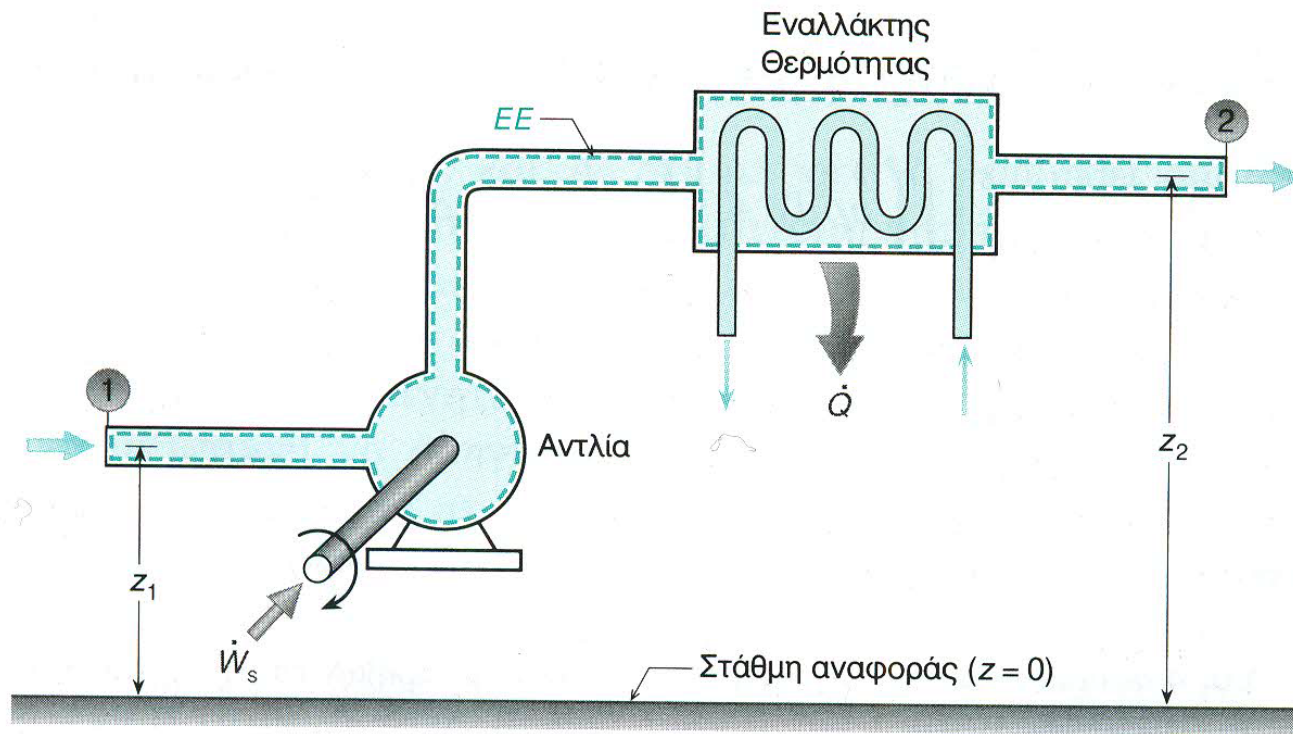
$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} e \rho dV + \oint_{EE} e \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Συνολική ροή ενέργειας:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_\tau = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} e \rho dV + \oint_{EE} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

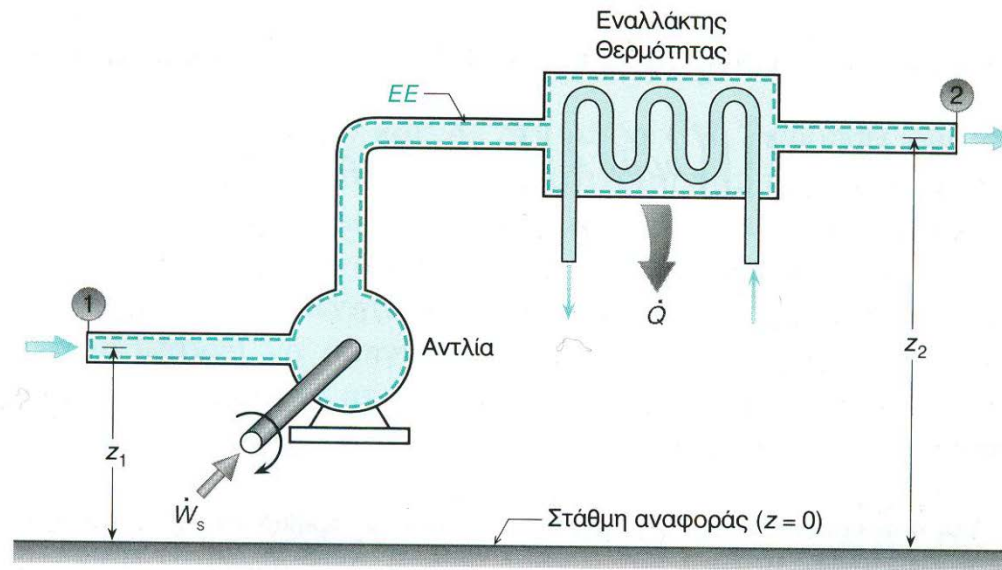
Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

Ειδικές μορφές: Η ΕΕ ταυτίζεται με τα εσωτερικά τοιχώματα του αγωγού ή είναι κάθετη στη ροή



Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

Ειδικές μορφές: Το έργο διάτμησης είναι μηδέν (για αμελητέο έργο κάθετων ιξωδών δυνάμεων)



$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} e \rho dV + \oiint_{EE} (e + pv) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

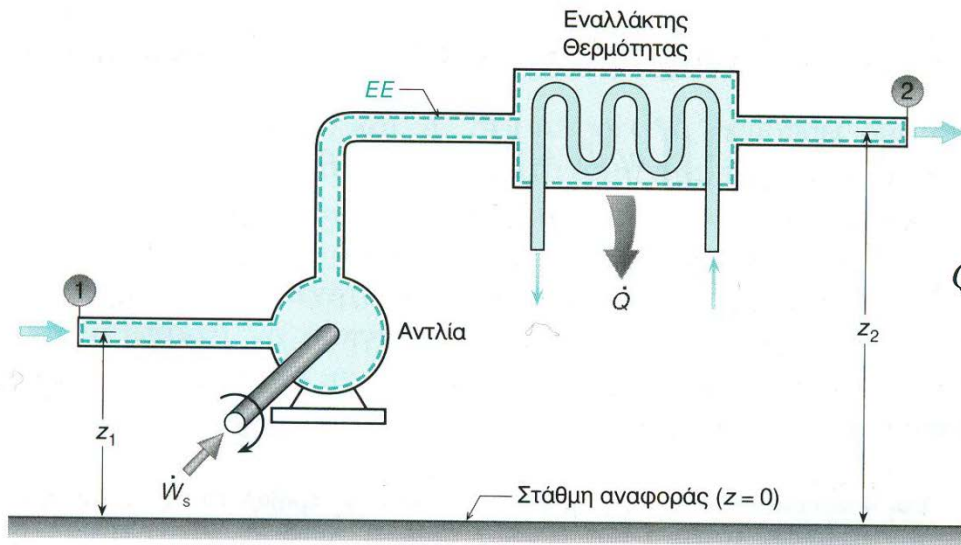
Ειδικές μορφές:

- Το έργο διάτμησης είναι μηδέν (για αμελητέο έργο κάθετων ιξωδών δυνάμεων) όταν:
 - Η ΕΕ ταυτίζεται με τα εσωτερικά τοιχώματα του αγωγού ή είναι κάθετη στη ροή
 - Το ρευστό είναι ιδανικό, ανεξάρτητα από την ΕΕ
- Το έργο των ιξωδών δυνάμεων δεν ταυτίζεται με το έργο τριβής W_f

$$\delta W_\ell = \delta W_R - \delta W$$

[έργο τριβής] = [έργο αντιστρεπτής διεργασίας] - [πραγματικό έργο]

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

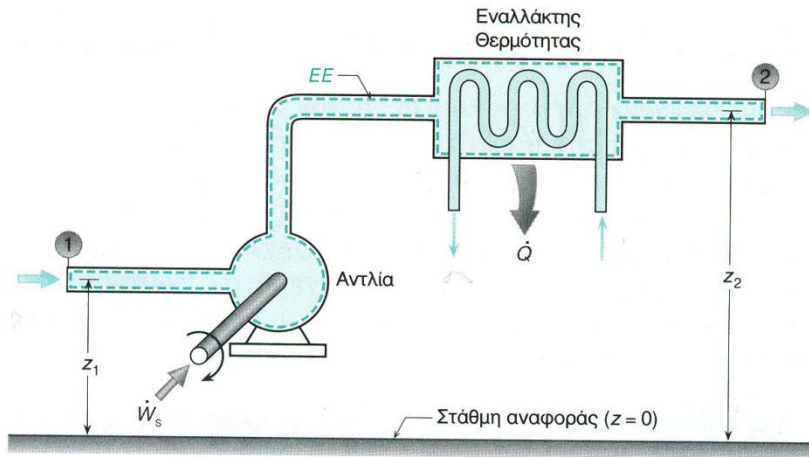


$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} e \rho dV + \oint_{EE} (e + pv) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Η παράπλευρη επιφάνεια είναι αδιαπέραστη από ρευστό:

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_s = & \frac{d}{dt} \iiint_{OE} e \rho dV + \iint_{A_1} (e_1 + p_1 v_1) \rho_1 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1) dA_1 \\ & + \iint_{A_2} (e_2 + p_2 v_2) \rho_2 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA_2 \end{aligned}$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας



Η παράπλευρη επιφάνεια είναι αδιαπέραστη από ρευστό:

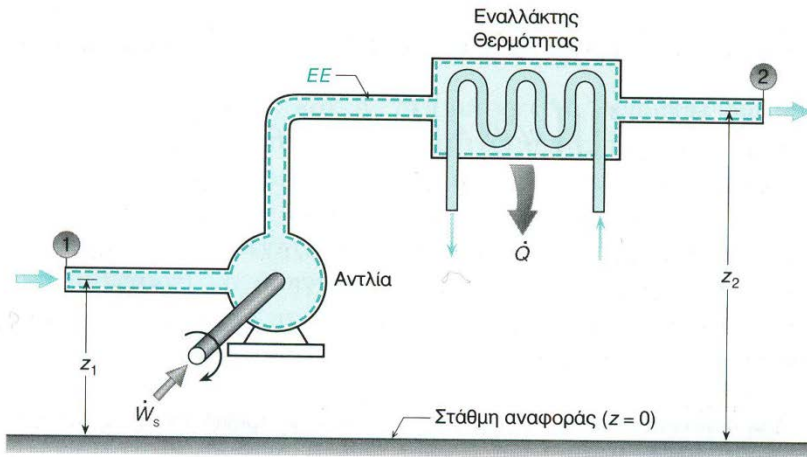
$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = -v_1$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = v_2$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} e \rho dV + \iint_{A_2} (e_2 + p_2 v_2) \rho_2 v_2 dA_2$$

$$- \iint_{A_1} (e_1 + p_1 v_1) \rho_1 v_1 dA_1$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας



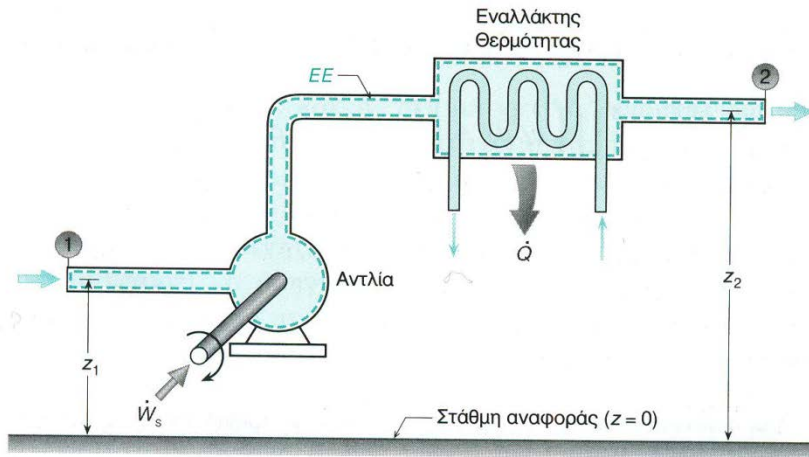
Για ομοιόμορφη ταχύτητα:

$$\dot{m}_1 (= \rho_1 v_1 A_1)$$

$$\dot{m}_2 (= \rho_2 v_2 A_2)$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{d}{dt} \iiint_{OE} e \rho dV + \dot{m}_2 (e_2 + p_2 v_2) + \dot{m}_1 (e_1 + p_1 v_1)$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας



Και μόνιμη ροή:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{OE} e \rho dV = 0$$

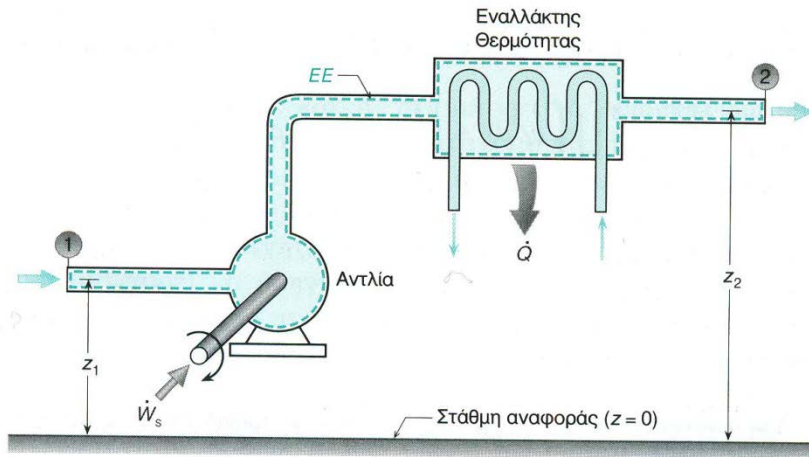
$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m} [(e_2 + p_2 v_2) - (e_1 + p_1 v_1)]$$

ή

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m} \left[(h_2 - h_1) + \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) \right]$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας



Και μόνιμη ροή:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{OE} e \rho dV = 0$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

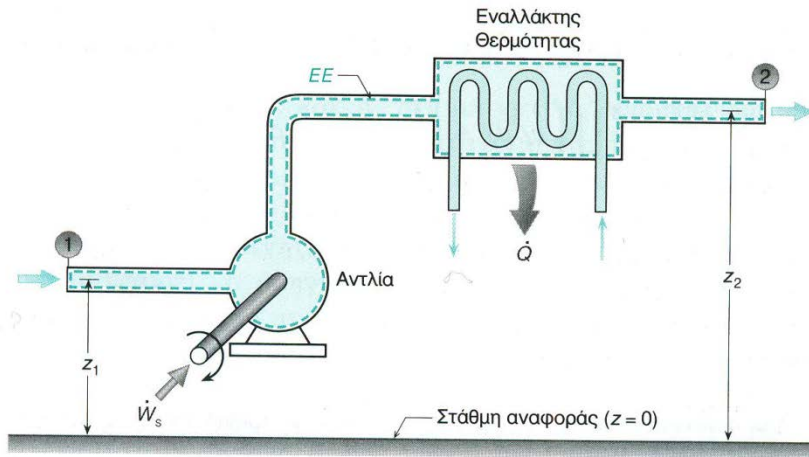
$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m} \left[(h_2 - h_1) + \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) \right]$$

ή

$$q - w_s = \Delta h + \Delta \left(\frac{v^2}{2} \right) + g \Delta z$$

Εξίσωση ενέργειας για ανοιχτό σύστημα

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας

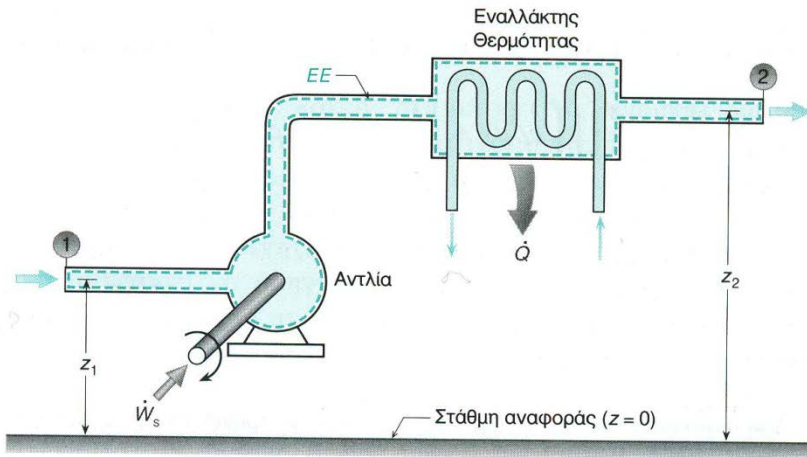


Για **ανομοιόμορφη** ταχύτητα, εισάγουμε το συντελεστή διόρθωσης, που προκύπτει αν θεωρήσω την ίδια ενέργεια για τη μέση ταχύτητα για ασυμπίεστο ρευστό :

$$\alpha = \frac{1}{A} \int \int_A \left(\frac{v}{\bar{v}} \right)^3 dA$$

$$\int \int_A \rho \frac{v^3}{2} dA = \rho \int \int_A \frac{v^3}{2} dA = \alpha \left(\dot{m} \frac{\bar{v}^2}{2} \right) = \alpha \left((\rho \bar{v} A) \frac{\bar{v}^2}{2} \right) = \alpha \rho \frac{\bar{v}^3}{2} A$$

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας



Η εξίσωση ενέργειας γίνεται:

$$q - w_s = \Delta h + \Delta \left(\alpha \frac{v^2}{2} \right) + g \Delta z$$

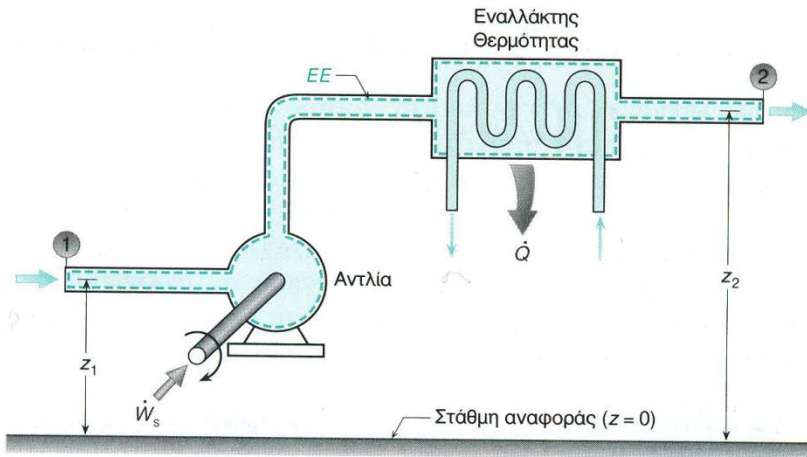
$$\alpha = 2$$

{ Για στρωτή ροή σε κυλινδρικό αγωγό }

$$\alpha = \frac{(1 + m)^3 (2 + m)^3}{4 (1 + 3m) (2 + 3m)}$$

{ Για τυρβώδη ροή σε κυλινδρικό αγωγό }

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας



Η εξίσωση ενέργειας γίνεται:

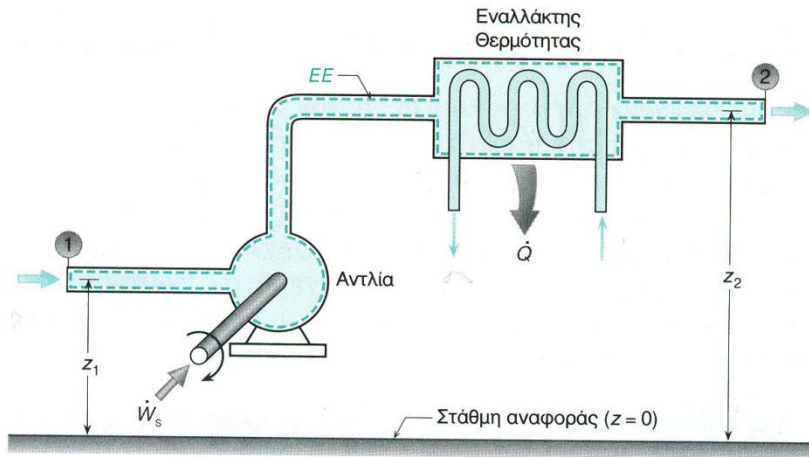
$$q - w_s = \Delta h + \Delta \left(\alpha \frac{v^2}{2} \right) + g \Delta z$$

$\alpha = 2$ { Για στρωτή ροή σε κυλινδρικό αγωγό }

$\alpha = \frac{(1 + m)^3 (2 + m)^3}{4 (1 + 3m) (2 + 3m)}$ { Για τυρβώδη ροή σε κυλινδρικό αγωγό }

m	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
α	1,106	1,077	1,058	1,046	1,037

Μακροσκοπική εξίσωση Ενέργειας



Η εξίσωση ενέργειας γίνεται:

$$q - w_s = \Delta h + \Delta \left(\alpha \frac{v^2}{2} \right) + g \Delta z$$

$$\alpha = \frac{(1 + m)^3 (2 + m)^3}{4 (1 + 3m) (2 + 3m)}$$

{ Για τυρβώδη ροή σε κυλινδρικό αγωγό }

m	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
α	1,106	1,077	1,058	1,046	1,037

Για τυρβώδη ροή ο α πλησιάζει το 1 και για αυτό συνήθως παραλείπεται

Εξίσωση Μηχανικής Ενέργειας

Η εξίσωση μηχανικής ενέργειας **δεν** περιλαμβάνει όρους θερμικής ενέργειας που θερμοδυναμικά δεν είναι εφικτό να μετατραπούν πλήρως σε έργο

Από το Α' Θερμοδυναμικό αξίωμα: $\delta q = du + \delta w$

Αφού: $\delta W_\ell = \delta W_R - \delta W$ [έργο τριβής] = [έργο αντιστρεπτής διεργασίας] - [πραγματικό έργο]

$\delta q = du + \delta W_R - \delta W_\ell$
Το μέγιστο έργο είναι: $\delta W_R = p dv$ } $\delta q = du + p dv - \delta W_\ell$

$$\text{ή} \quad \delta q = dh - v dp - \delta W_\ell = dh - \frac{dp}{\rho} - \delta W_\ell$$

Και με ολοκλήρωση:

$$q = \Delta h - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} - w_\ell$$

Εξίσωση Μηχανικής Ενέργειας

Η εξίσωση μηχανικής ενέργειας **δεν** περιλαμβάνει όρους θερμικής ενέργειας που θερμοδυναμικά δεν είναι εφικτό να μετατραπούν πλήρως σε έργο

$$\left. \begin{aligned} q &= \Delta h - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} - w_\ell \\ q - w_s &= \Delta h + \Delta \left(\alpha \frac{v^2}{2} \right) + g \Delta z \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta \left(\alpha \frac{v^2}{2} \right) + g \Delta z + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + w_\ell + w_s = 0$$

Εξίσωση Μηχανικής Ενέργειας

Η εξίσωση μηχανικής ενέργειας **ισχύει** για:

- ✓ ακίνητο όγκο ελέγχου
- ✓ με μια είσοδο και μια έξοδο
- ✓ Μηδενικό έργο διάτμησης
- ✓ Μόνιμη ροή

$$\Delta \left(\alpha \frac{v^2}{2} \right) + g \Delta z + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + w_\ell + w_s = 0$$

Ή μεταξύ δύο διατομών:

$$\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2} + g z_2$$

Ή στην οριακή περίπτωση που ο ροϊκός σωλήνας είναι απειροστής διατομής (δηλαδή ροϊκή γραμμή) και οι συντελεστές διόρθωσης γίνονται εξ' ορισμού $\alpha = 1$:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g z_2$$

Εξίσωση Bernoulli

Εξίσωση Μηχανικής Ενέργειας

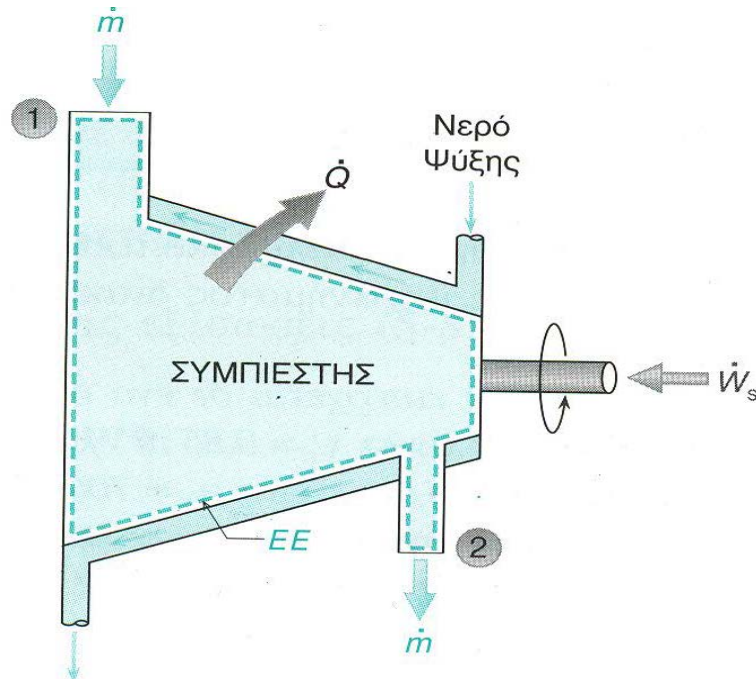
Η γενική εξίσωση μηχανικής ενέργειας για ιξώδη ροή και ακίνητο ΟΕ είναι:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{OE} \left(\frac{v^2}{2} + g z \right) \rho dV + \oiint_{EE} \left(\frac{v^2}{2} + g z + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \dot{W}_\ell + \dot{W}_s = 0$$

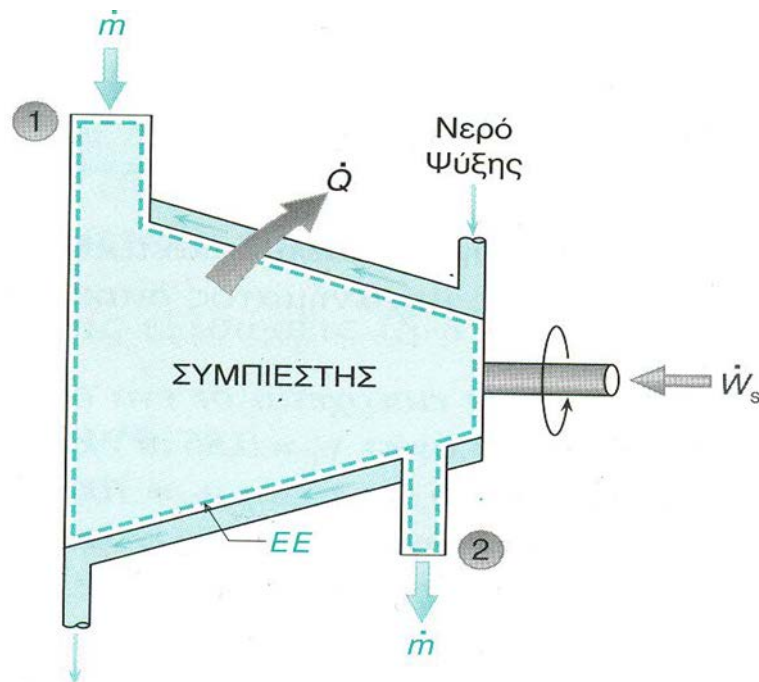
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός συσσώρευ-} \\ \text{σης κινητικής και} \\ \text{δυναμικής ενέργειας} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής κινητικής ενέργει-} \\ \text{ας, δυναμικής ενέργειας και έργου πίεσης} \\ \text{από τον όγκο ελέγχου διαμέσου της επι-} \\ \text{φάνειας ελέγχου, λόγω ροής του ρευστού} \end{array} \right\} \\ + \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός απωλειών} \\ \text{ενέργειας τριβών} \\ \text{στο εσωτερικό του} \\ \text{όγκου ελέγχου} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός απόδοσης} \\ \text{αξονικού έργου από} \\ \text{τον όγκο ελέγχου} \\ \text{στο περιβάλλον} \end{array} \right\} = 0$$

Το πρόβλημα: Αέρας εισέρχεται σε ένα συμπιεστή με ταχύτητα $v_1 = 5 \text{ m/s}$, πίεση $p_1 = 100 \text{ kPa}$ και ειδικό όγκο $v_1 = 0,85 \text{ m}^3/\text{kg}$. Στην έξοδο του συμπιεστή, ο αέρας έχει ταχύτητα $v_2 = 3,5 \text{ m/s}$, πίεση $p_2 = 700 \text{ kPa}$ και ειδικό όγκο $v_2 = 0,15 \text{ m}^3/\text{kg}$. Η ειδική εσωτερική ενέργεια του εξερχόμενου αέρα είναι μεγαλύτερη από εκείνη του εισερχόμενου αέρα κατά 88 kJ/kg . Για την ψύξη του συμπιεστή χρησιμοποιείται ως ψυκτικό μέσο νερό, το οποίο απάγει θερμότητα από το συμπιεζόμενο αέρα με ρυθμό $\dot{Q} = 35 \text{ kJ/s}$. Αν ο ρυθμός ροής μάζας του αέρα διαμέσου του συμπιεστή είναι $\dot{m} = 25 \text{ kg/min}$, να υπολογιστούν:

- Οι διάμετροι των αγωγών μέσω των οποίων ο αέρας προσάγεται και απάγεται από το συμπιεστή.
- Ο ρυθμός καθαρής εκροής ενέργειας από το συμπιεστή λόγω ροής του αέρα.
- Η θεωρητική ισχύς λειτουργίας του συμπιεστή.

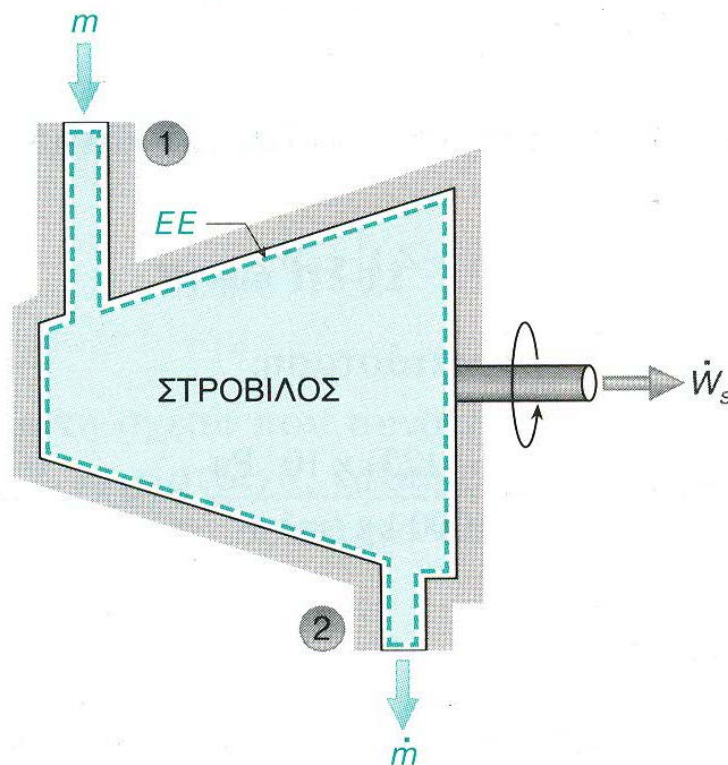


Το πρόβλημα: Στο Παράδειγμα 5-9, η πραγματική ροή στην είσοδο του συμπιεστή είναι στρωτή και στην έξοδό του τυρβώδης. Η κατανομή της ταχύτητας του αέρα στην είσοδο του συμπιεστή είναι παραβολική και δίνεται από την εξίσωση (5-47). Στην έξοδο του συμπιεστή η κατανομή της ταχύτητας του αέρα δίνεται από την εκθετική εξίσωση (5-50) με τιμή εκθέτη $m = 1/7$. Να υπολογιστεί ο ρυθμός καθαρής εκροής ενέργειας από το συμπιεστή λόγω της ροής αέρα με βάση τις πραγματικές κατανομές της ταχύτητας. Πόσο είναι το επί τοις εκατό σφάλμα στον υπολογισμό του ρυθμού αυτού με βάση τις μέσες ταχύτητες του αέρα;



Το πρόβλημα: Από μια υπερυψωμένη λίμνη εκρέει νερό το οποίο διέρχεται από έναν υδροστροβίλο με σταθερό ρυθμό 10^3 kg/s . Το νερό προσάγεται και απάγεται από το στροβίλο με αγωγούς της ίδιας διατομής. Σε απόσταση 8 m πάνω και $2,5 \text{ m}$ κάτω από τον άξονα του στροβίλου η πίεση του νερού στον αγωγό είναι 500 kPa και 123 kPa , αντίστοιχα. Οι απώλειες ενέργειας λόγω τριβών μεταξύ των δύο θέσεων μέτρησης της πίεσης είναι 80 kJ/s . Στις δεδομένες συνθήκες ροής, το νερό έχει πυκνότητα 1000 kg/m^3 και ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση $4,18 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$.

- α. Να υπολογιστεί η αξονική ισχύς του στροβίλου.
- β. Αν η υδραυλική εγκατάσταση είναι θερμικά μονωμένη από το περιβάλλον, πόση θα είναι η αύξηση της θερμοκρασίας του νερού λόγω τριβών;



Το πρόβλημα: Στο Σχήμα Π5-12 εικονίζεται η ροή ενός ρευστού σε απότομη διαστολή αγωγού. Ο μικρός αγωγός έχει διατομή A_1 και ο μεγάλος A_2 . Η πίεση του ρευστού στη θέση 1 είναι p_1 σε όλη την έκταση της διατομής A_1 . Η ροή είναι μόνιμη και ασυμπίεστη. Οι απώλειες θερμικής ενέργειας προς το περιβάλλον και οι διατμητικές τάσεις στα τοιχώματα του αγωγού θεωρούνται αμελητέες. Με τη χρησιμοποίηση του εικονιζόμενου όγκου ελέγχου, να ευρεθούν οι σχέσεις που δίνουν την πτώση πίεσης ($p_2 - p_1$) και τη μεταβολή της ειδικής εσωτερικής ενέργειας ($u_2 - u_1$) του ρευστού ως συνάρτηση της πυκνότητας ρ , της ταχύτητας u_1 του ρευστού στο μικρό αγωγό και των διατομών A_1 και A_2 .

