

Διαφορική ανάλυση ροής

6^ο Εξάμηνο Μηχανικών Επιστήμης Υλικών

ΜΑΚΡΟΣΚΟΠΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- Εκφράζουν τους νόμους διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας για μια ορισμένη περιοχή του χώρου.
- Χρησιμοποιούνται όταν ενδιαφερόμαστε για μια γενική περιγραφή του πεδίου ροής.
- Ενδιαφέρουν περισσότερο το μηχανικό που ασχολείται με τις τεχνικές εφαρμογές των αρχών της Μηχανικής των Ρευστών.
- Δίνουν μέσες τιμές ή προσεγγιστικές σχέσεις των μεταβλητών του πεδίου ροής που είναι αποδεκτές από τεχνική άποψη.
- Εφαρμόζονται σε όγκους ελέγχου πεπερασμένου μεγέθους, οι οποίοι μπορεί να περιλαμβάνουν περισσότερες από μία φάσεις. Για παράδειγμα, ο όγκος ελέγχου του Σχήματος 5-4α περιέχει μόνο ρευστό, ενώ ο όγκος ελέγχου του Σχήματος 5-4β περιλαμβάνει και στερεά σώματα.
- Μπορεί να εξαχθούν από τις αντίστοιχες διαφορικές με τη χρησιμοποίηση του θεωρήματος απόκλισης του Gauss.

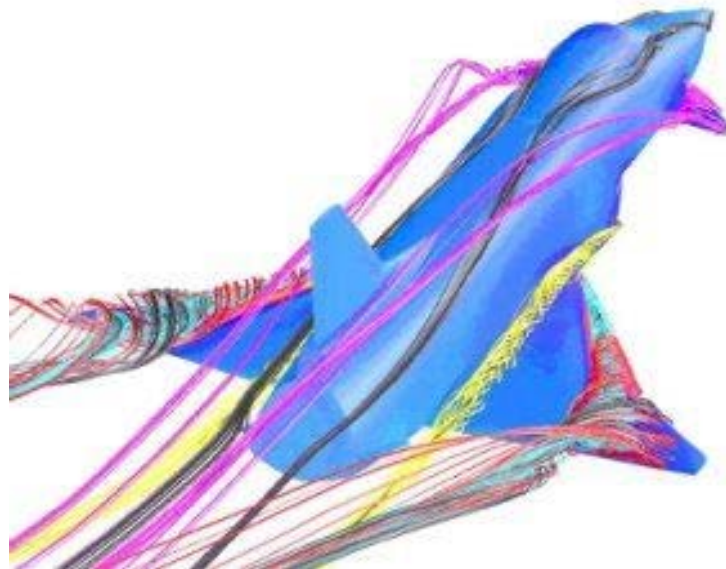
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- Εκφράζουν τους νόμους διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας για ένα ορισμένο σημείο του χώρου.
- Χρησιμοποιούνται όταν ενδιαφερόμαστε για τη λεπτομερή περιγραφή του πεδίου ροής.
- Ενδιαφέρουν περισσότερο τον ερευνητή που ασχολείται με τη μαθηματική διερεύνηση των φαινομένων ροής ρευστών.
- Δίνουν ακριβείς τιμές ή κατανομές των μεταβλητών του πεδίου ροής, οι οποίες συντελούν στην κατανόηση του μηχανισμού μεταφοράς m , P και E .
- Εφαρμόζονται σε όγκους ελέγχου απειροστού μεγέθους, οι οποίοι περιορίζονται σε μία μόνο φάση.
- Για τη μαθηματική ολοκλήρωσή τους πρέπει να συμπληρωθούν με κατάλληλες οριακές και, πιθανόν, αρχικές συνθήκες.
- Μπορεί να εξαχθούν από τις αντίστοιχες μακροσκοπικές με τη χρησιμοποίηση του θεωρήματος απόκλισης του Gauss.

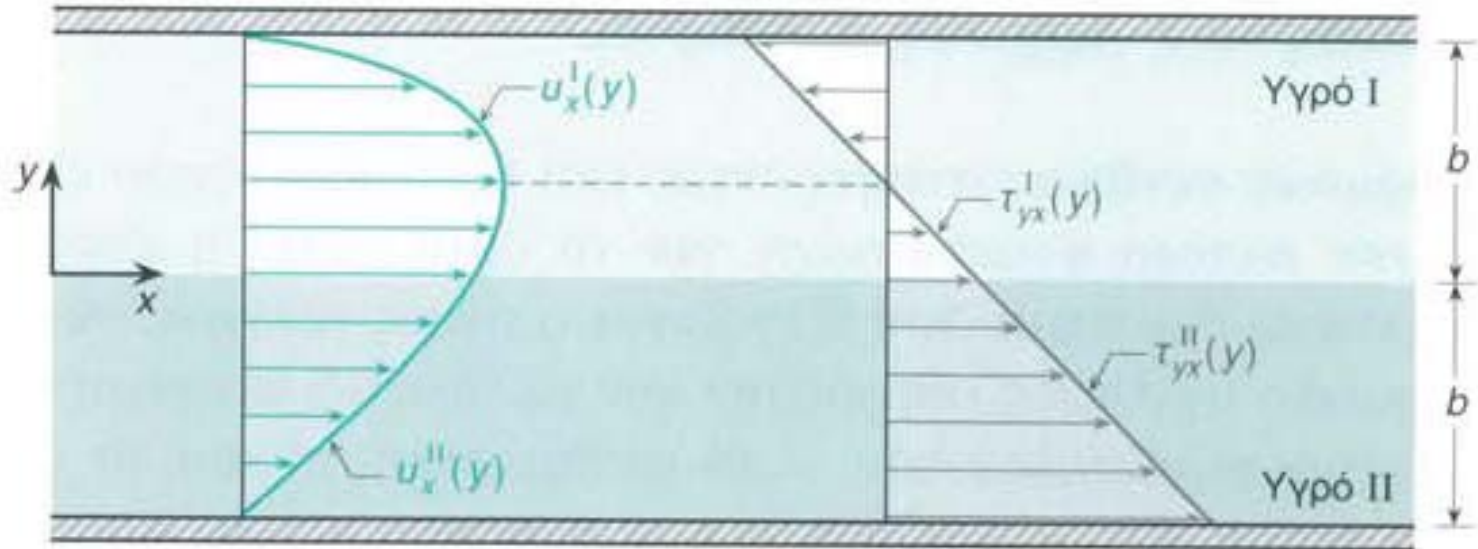
Οριακές και αρχικές συνθήκες

Οριακές συνθήκες:

- Φυσική σημασία
 - αλληλεπίδραση του όγκου ελέγχου με το περιβάλλον
- Μαθηματική σημασία
 - Όρια του μελετούμενου χώρου
- Διεπιφάνεια
 - Στερεό ρευστό
 - Υγρό υγρό
 - Υγρό αέριο



Οριακές και αρχικές συνθήκες



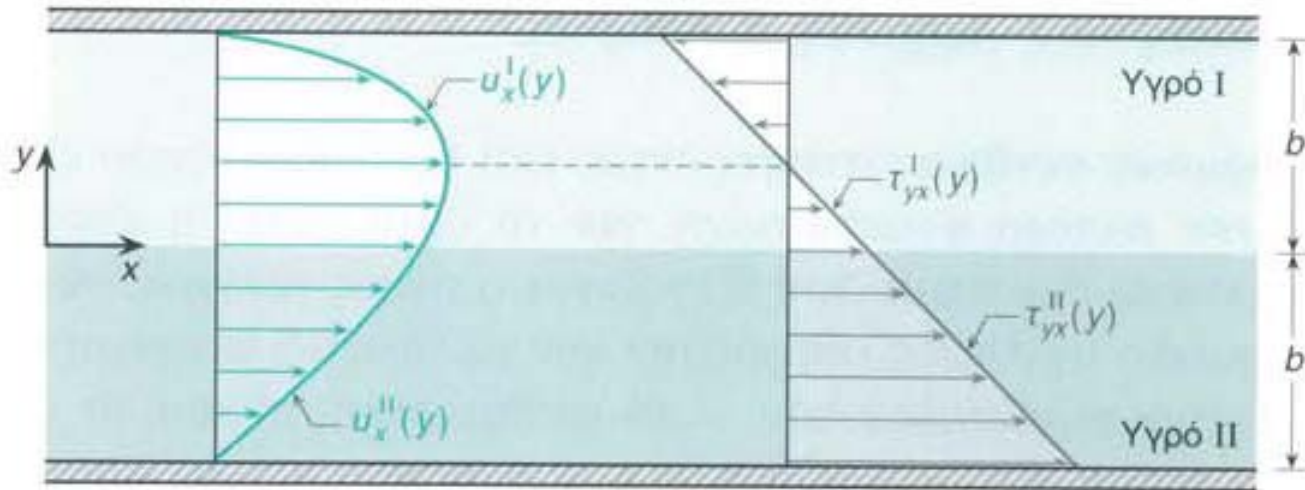
Στερεό-Υγρό: Για Νευτώνεια Ρευστά ισχύει η συνθήκη μη ολίσθησης

Ταχύτητες υγρών I & II
στη διεπιφάνεια με την πλάκα:

$$v_x^I \Big|_{y=+b} = 0$$

$$v_x^{II} \Big|_{y=-b} = 0$$

Οριακές και αρχικές συνθήκες



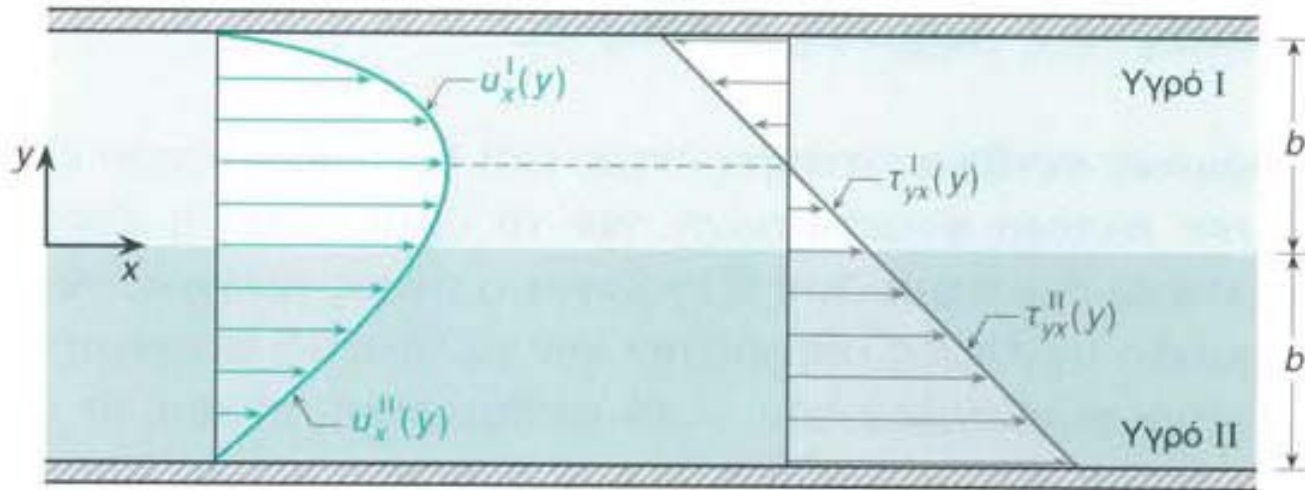
Υγρό-Υγρό: Επιμέρους οριακές συνθήκες:

1. Κινηματική οριακή συνθήκη

Ταχύτητες υγρών I & II
στη διεπιφάνεια τους:

$$v_x^I \Big|_{y=0} = v_x^{II} \Big|_{y=0}$$

Οριακές και αρχικές συνθήκες



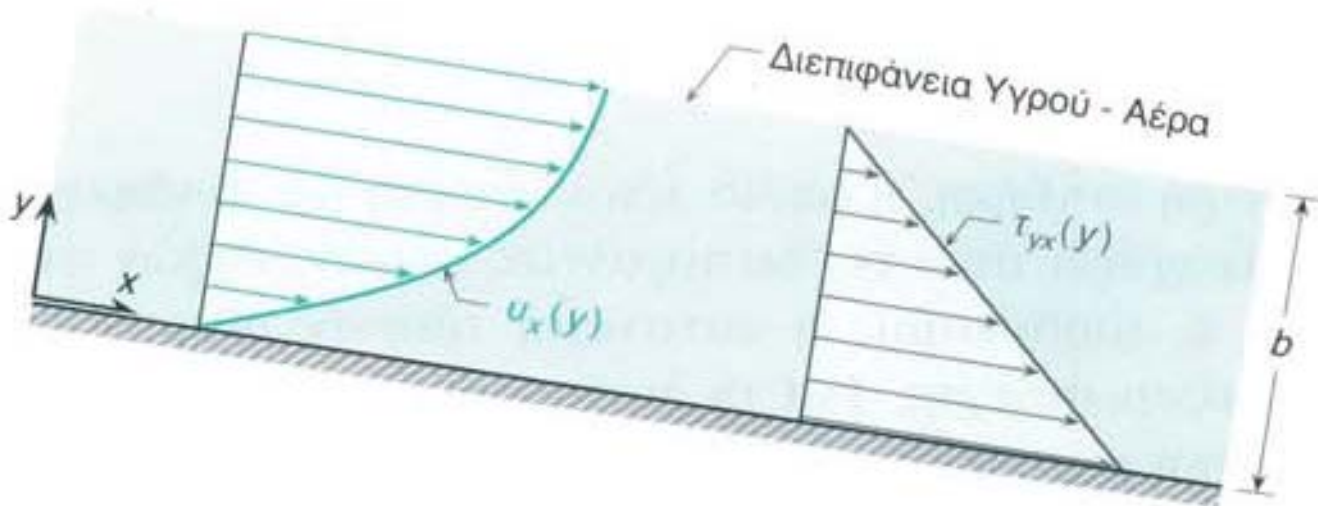
Υγρό-Υγρό: Επιμέρους οριακές συνθήκες:

2. Συνθήκη Μηχανικής ισορροπίας

Συνέχεια τάσεων στη
διεπιφάνεια των υγρών I & II:

$$\tau_{yx}^I \Big|_{y=0} = \tau_{yx}^{II} \Big|_{y=0}$$

Οριακές και αρχικές συνθήκες



Υγρό-Αέριο: Οριακές συνθήκες

Δεν υπάρχει μεταφορά τάσης (ή ο ρυθμός μεταφορά ορμής μηδενίζεται)

$$\tau_{yx} \Big|_{y=b} = 0 \quad \text{† (για νευτώνειο ρευστό)} \quad \frac{dv_x}{dy} \Big|_{y=b} = 0$$

Ισοδύναμα, τι ισχύει για την ταχύτητα στο b;

Οριακές και αρχικές συνθήκες

Αρχικές συνθήκες:

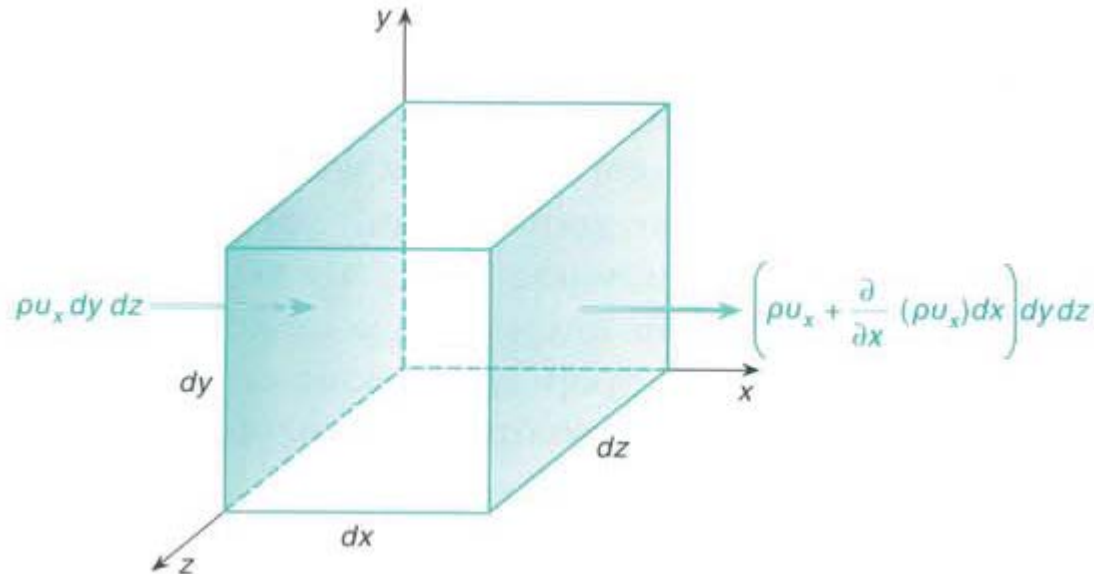
- Απομονώνουν το χρονικό παράθυρο ενδιαφέροντος από τον προηγούμενο χρόνο
- Χρειάζονται για μη μόνιμες ροές
 - Ορίζουν τις τιμές των χρονοεξαρτώμενων μεταβλητών μια δεδομένη στιγμή $t=0$
 - Π.χ. για εκροή αερίου από δοχείο πίεσης:

$$\rho|_{t=0} = \rho_0$$



ΔΕ συνέχειας

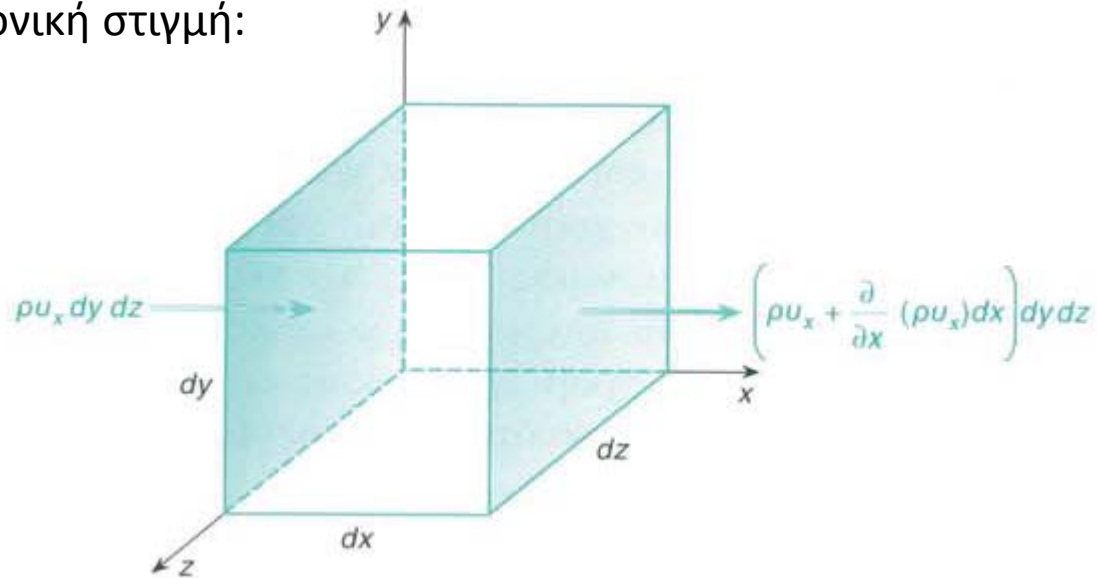
Για οποιαδήποτε χρονική στιγμή:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός συσσώρευ-} \\ \text{σης μάζας στον} \\ \text{όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός εισροής} \\ \text{μάζας στον} \\ \text{όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός εκροής} \\ \text{μάζας από τον} \\ \text{όγκο ελέγχου} \end{array} \right\}$$

ΔΕ συνέχειας

Για οποιαδήποτε χρονική στιγμή:

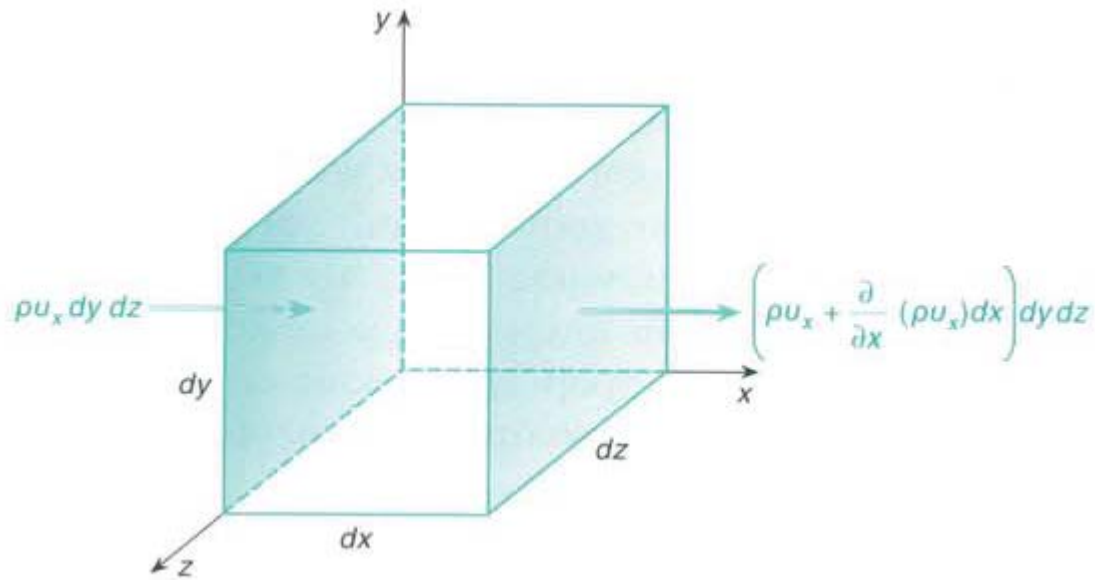


$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός συσσώρευ-} \\ \text{σης μάζας στον} \\ \text{όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

Η μάζα εισέρχεται από την αριστερή (αρνητική) επιφάνεια και εξέρχεται από την δεξιά (θετική) επιφάνεια

ΔΕ συνέχειας

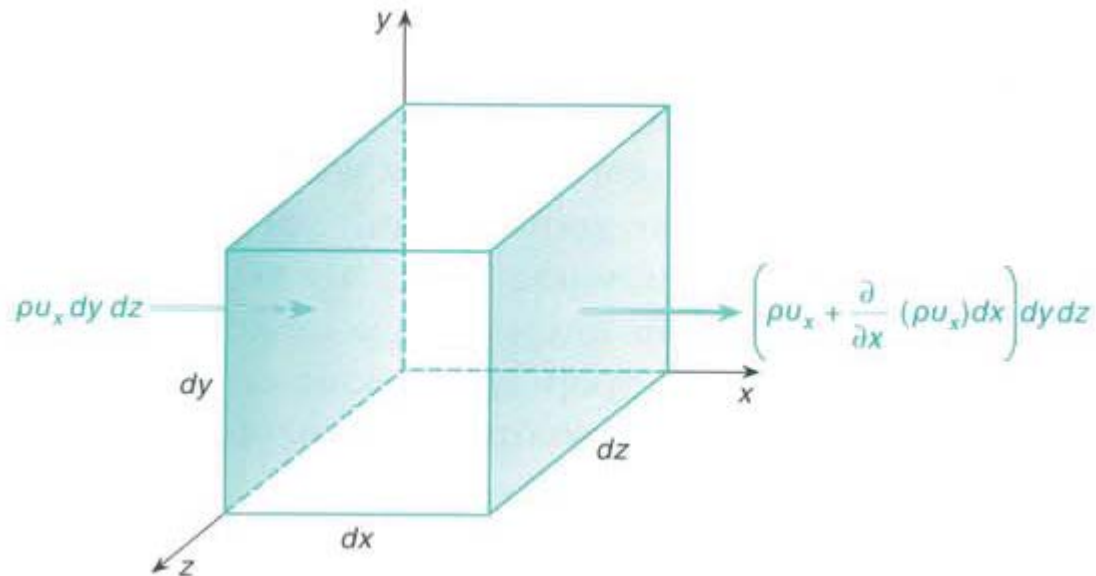
Ο ρυθμός εισροής μάζας από την επιφάνεια $dydz$ είναι:



$$\dot{m}_{(-x)} = \rho v_x dy dz$$

ΔΕ συνέχειας

Ο ρυθμός εκροής μάζας από την επιφάνεια $dydz$ (αγνοώντας τα διαφορικά ανώτερης τάξης) είναι:



$$\dot{m}_{(+x)} = \left(\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) dx \right) dy dz$$

ΔΕ συνέχειας

Κατά αναλογία:

Για την επιφάνεια $dx dz$:

$$\dot{m}_{(-y)} = \rho v_y dx dz$$

$$\dot{m}_{(+y)} = \left(\rho v_y + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) dy \right) dx dz$$

Για την επιφάνεια $dx dy$:

$$\dot{m}_{(-z)} = \rho v_z dx dy$$

$$\dot{m}_{(+z)} = \left(\rho v_z + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) dz \right) dx dy$$

ΔΕ συνέχειας

Συνολικά, η καθαρή εισροή μάζας στον όγκο ελέγχου είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής} \\ \text{εισροής μάζας} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} = [\dot{m}_{(-x)} + \dot{m}_{(-y)} + \dot{m}_{(-z)}] - [\dot{m}_{(+x)} + \dot{m}_{(+y)} + \dot{m}_{(+z)}]$$
$$= - \left(\frac{\partial}{\partial X} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial Z} (\rho v_z) \right) dx dy dz \quad ($$

ΔΕ συνέχειας

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής} \\ \text{εισροής μάζας} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} = [\dot{m}_{(-x)} + \dot{m}_{(-y)} + \dot{m}_{(-z)}] - [\dot{m}_{(+x)} + \dot{m}_{(+y)} + \dot{m}_{(+z)}]$$

$$= - \left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right) dx dy dz \quad ($$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός συσσώρευ-} \\ \text{σης μάζας στον} \\ \text{όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

$\Rightarrow$

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] dx dy dz = 0$$

ΔΕ συνέχειας

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] dx dy dz = 0$$

$$dx dy dz \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

ΔΕ συνέχειας

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) &= 0 \\ \nabla &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

ΔΕ συνέχειας

Ανυσματική μορφή της Διαφορικής εξίσωσης συνέχειας: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$

Μορφή δεικτών της Διαφορικής εξίσωσης συνέχειας: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0$

Φυσική διατύπωση της Διαφορικής εξίσωσης συνέχειας:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της} \\ \text{πυκνότητας του ρευσ-} \\ \text{τού σε ένα ορισμένο} \\ \text{σημείο του πεδίου ροής} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής} \\ \text{μάζας ανά μονάδα ό-} \\ \text{γκου από το θεωρούμενο} \\ \text{σημείο (απειροστό όγκο)} \end{array} \right\} = 0$$

ΔΕ συνέχειας

Κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

ΔΕ συνέχειας

Για παρατηρητή που κινείται μαζί με το ρευστό (απεικόνιση κατά *Lagrange*):

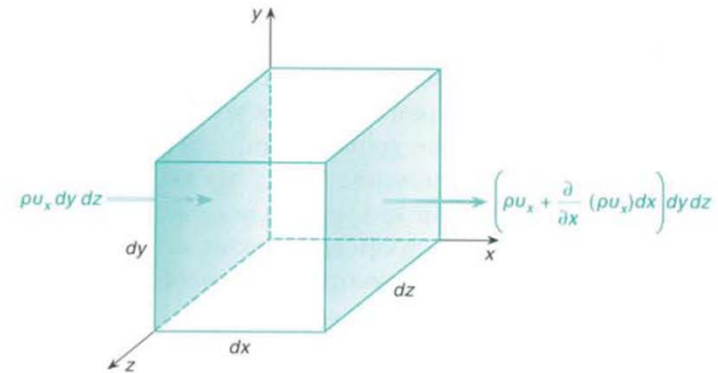
$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (\text{ορισμός της υλικής παραγώγου})$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Ή πως αντιλαμβάνεται την αλλαγή της πυκνότητας παρατηρητής που κινείται μαζί με το ρευστό

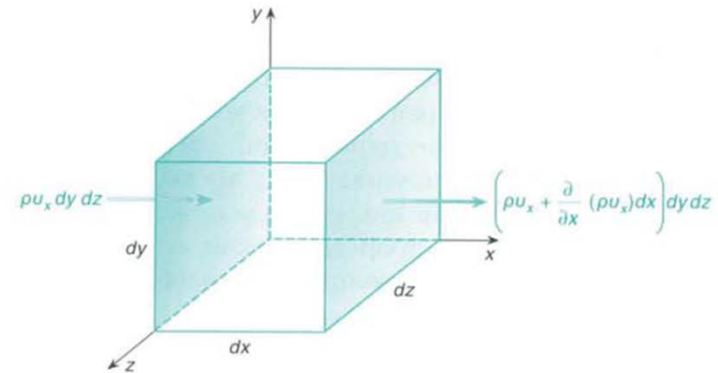
ΔΕ συνέχειας



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

Πόσοι είναι οι άγνωστοι στην εξίσωση συνέχειας?

ΔΕ συνέχειας



Το πρόβλημα: Να εξαχθεί η τύπου Euler μορφή της διαφορικής εξίσωσης συνέχειας από την αντίστοιχη μακροσκοπική εξίσωση με τη χρησιμοποίηση του θεωρήματος απόκλισης του Gauss.

Το πρόβλημα: Το πεδίο πυκνότητας μιας διδιάστατης ροής μεταβάλλεται γραμμικά με το y σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\rho = a - by \quad (1)$$

όπου a και b είναι σταθερές. Να εξεταστεί αν το πεδίο ταχύτητας της ροής αυτής μπορεί να έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{v} = 2cx\mathbf{i} - cy\mathbf{j} \quad (2)$$

όπου ο συντελεστής c είναι σταθερό μέγεθος.

ΔΕ συνέχειας: Ειδικές μορφές

Για μόνιμη ροή:

$$\overset{0}{\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

Για μόνιμη ροή, ο ρυθμός εκροής ανά μονάδα όγκου είναι μηδέν.
Ισοδύναμα:

$$\overset{0}{\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

ΔΕ συνέχειας: Ειδικές μορφές

Για μόνιμη ροή και καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

Για μόνιμη ροή, και κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

ΔΕ συνέχειας: Ειδικές μορφές

Για ασυμπίεστη ροή:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \\ \rho \neq 0 \wedge \rho = c \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Ισοδύναμα από τη γενική εξίσωση:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

{ Συνθήκη ασυμπίεστης ροής }

ΔΕ συνέχειας: Ειδικές μορφές

Η ασυμπίεστη ροή είναι και μόνιμη;

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \{ \text{Συνθήκη ασυμπίεστης ροής} \}$$

Ισοδύναμα:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \{ \text{Μόνιμο πεδίο πυκνότητας} \}$$

^

$$\nabla \rho = 0 \quad \{ \text{Ομοιόμορφο πεδίο πυκνότητας} \}$$

ή

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad \text{Η Ασυμπίεστη ροή μπορεί να είναι και μη μόνιμη}$$

ΔΕ συνέχειας: Ειδικές μορφές

Για κάθε ασυμπίεστη ροή ισχύει:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \text{Καρτεσιανές συντεταγμένες} \\ \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0 \\ \text{Κυλινδρικές συντεταγμένες} \end{array} \right.$$

Ισοδύναμα:

$$e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 0$$

$$e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{zz} = 0$$

Για ασυμπίεστη ροή το άθροισμα των τριών ρυθμών παραμόρφωσης είναι μηδέν, δηλαδή ο συνολικός όγκος δεν μεταβάλλεται ανεξάρτητα από το σχήμα (ισοχωρική ροή)

Το πρόβλημα: Η ακτινική συνιστώσα, v_r , της ταχύτητας του ρευστού σε μια ασυμπίεστη, διδιάστατη ροή δίνεται από την εξίσωση:

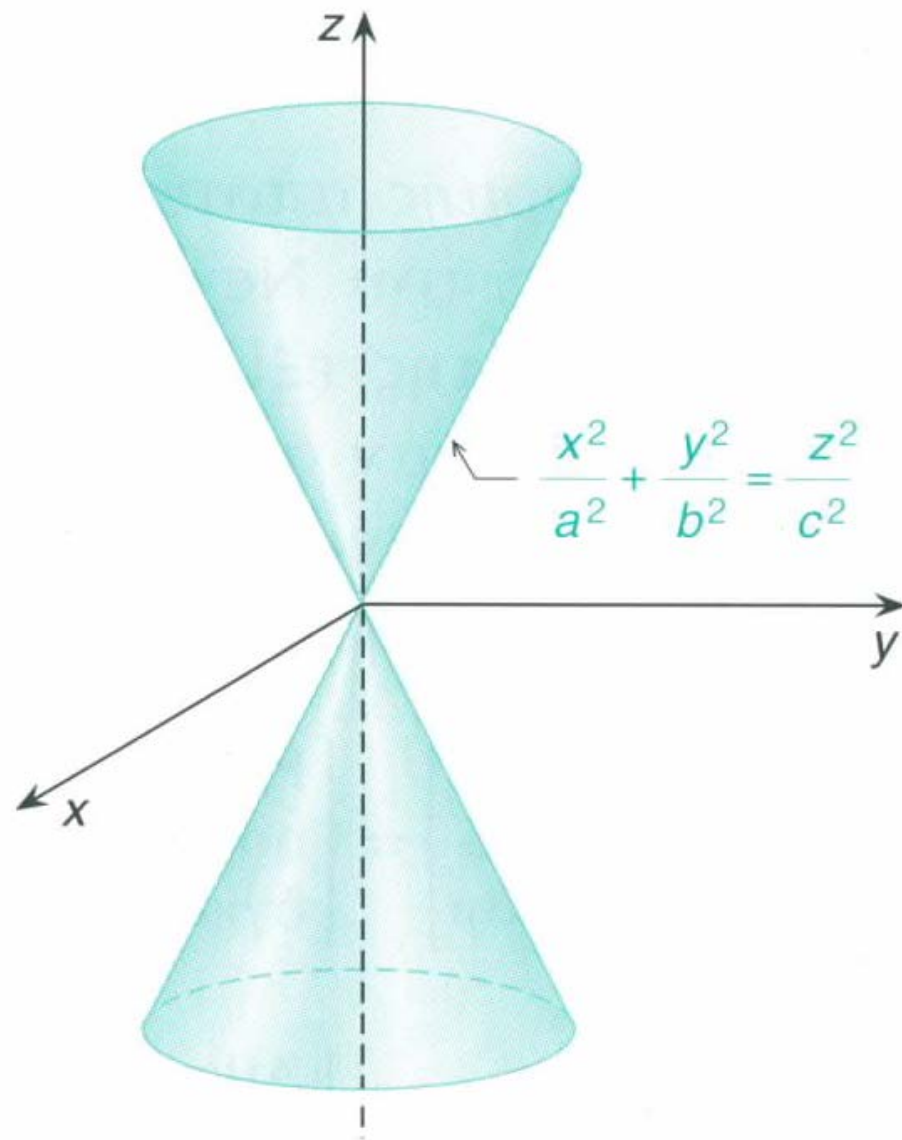
$$v_r = \frac{a \cos \theta}{r^2} \quad (1)$$

όπου a είναι σταθερά. Ποιά μορφή πρέπει να έχει η εφαπτομενική συνιστώσα, v_θ , της ταχύτητας ώστε να ικανοποιείται η διαφορική εξίσωση συνεχείας;

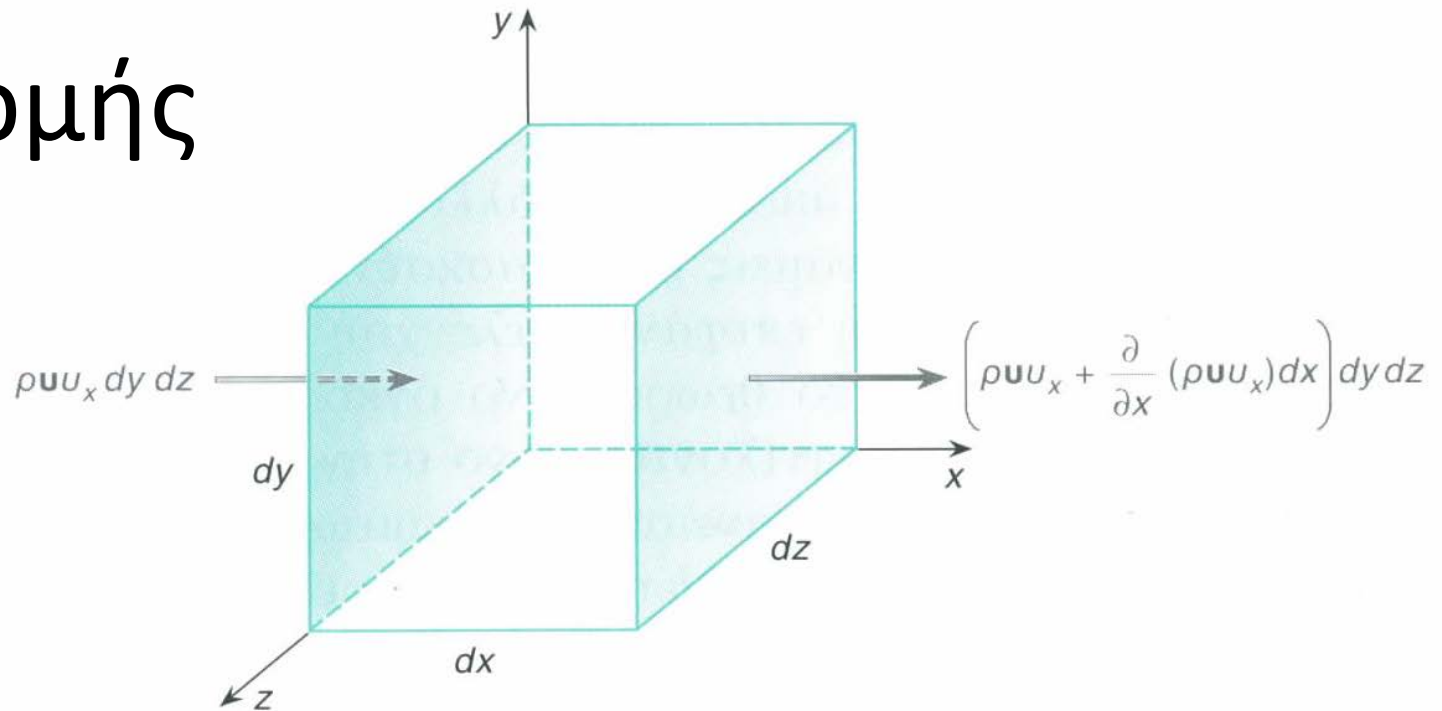
Το πρόβλημα: Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{v} = b^2 x^3 \mathbf{i} + a^2 y^3 \mathbf{j} - z^3 \mathbf{k} \quad (1)$$

όπου a και b είναι σταθερές. Να καθοριστούν οι περιοχές του πεδίου ροής στις οποίες η πυκνότητα του ρευστού αυξάνεται, μειώνεται ή παραμένει σταθερή με το χρόνο, θεωρώντας ότι το μέγεθος αυτό εξαρτάται μόνον από το χρόνο.

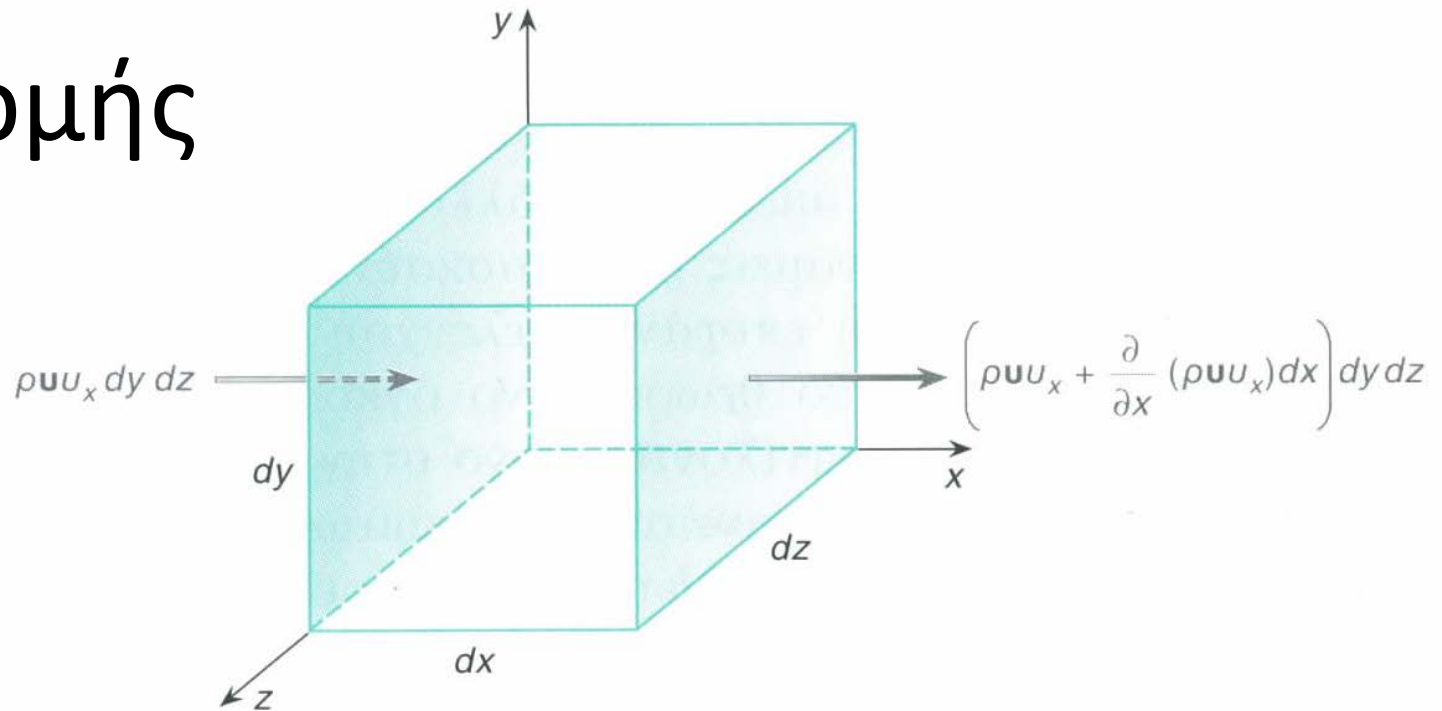


ΔΕ ορμής



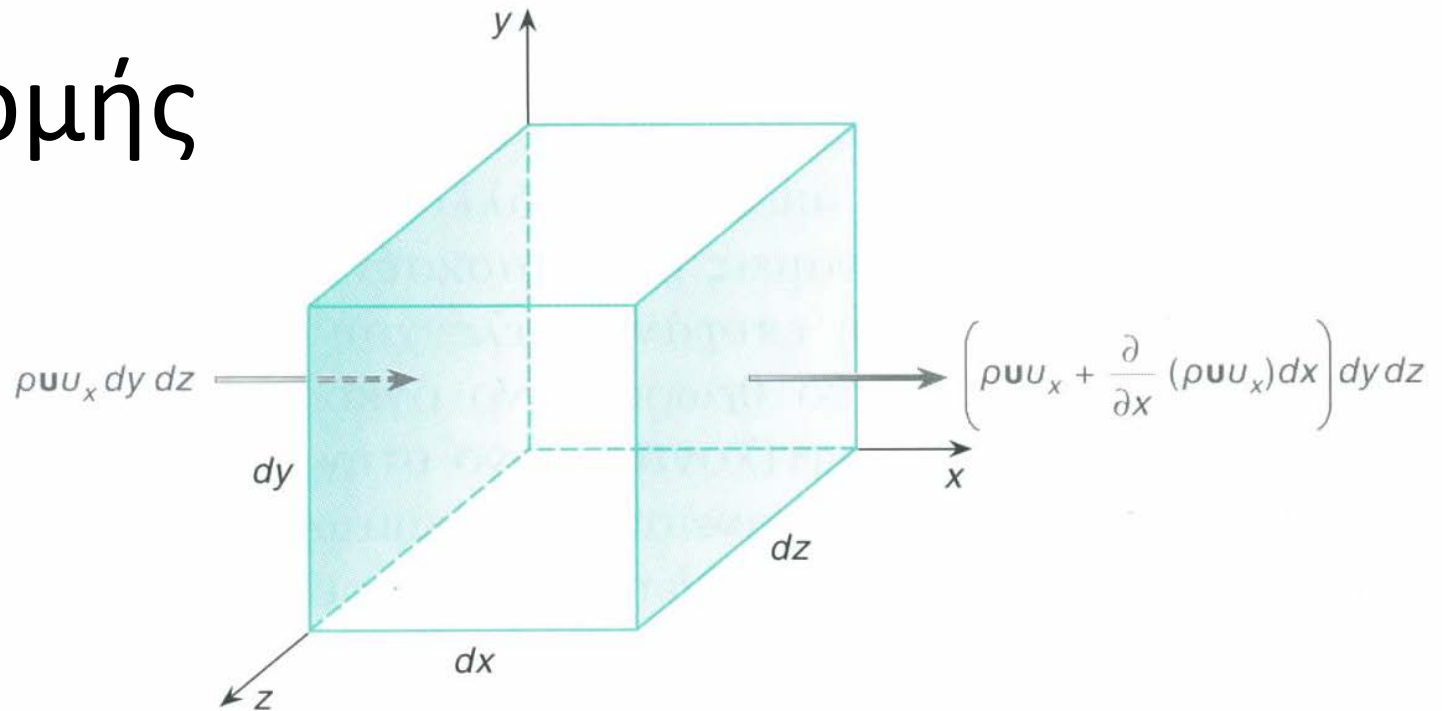
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της ορ-} \\ \text{μής του ρευστού που πε-} \\ \text{ριέχεται στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός εισροής} \\ \text{ορμής στον} \\ \text{όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός εκροής} \\ \text{ορμής από τον} \\ \text{όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Άθροισμα όλων των εξωτε-} \\ \text{ρικών δυνάμεων που δρουν} \\ \text{πάνω στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\}$$

ΔΕ ορμής



$$\left\{ \text{Ρυθμός μεταβολής της ορμής του ρευστού που περιέχεται στον όγκο ελέγχου} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) dx dy dz$$

ΔΕ ορμής

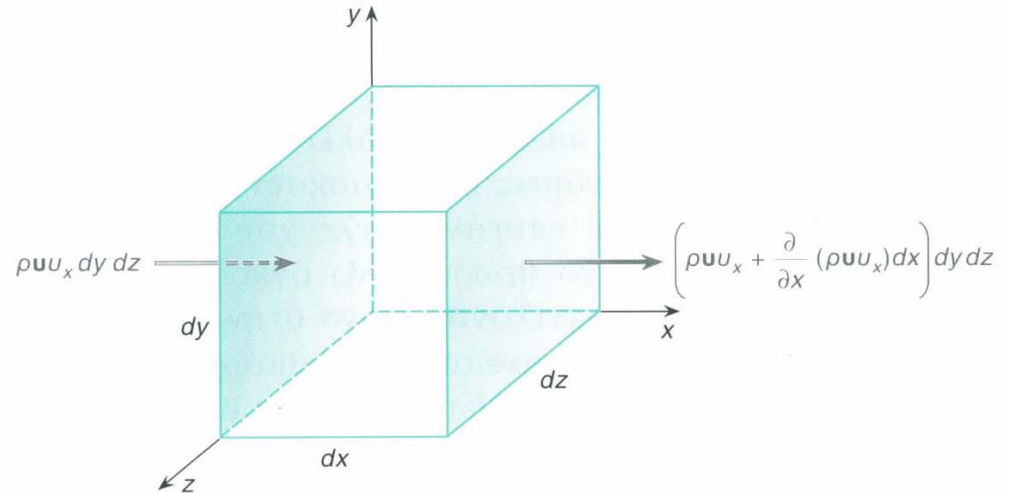


$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός εισροής} \\ \text{ορμής στον} \\ \text{όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός εκροής} \\ \text{ορμής από τον} \\ \text{όγκο ελέγχου} \end{array} \right\}$$

$$\dot{P}_{(-x)} = \rho \mathbf{u} u_x dy dz \quad - \quad \dot{P}_{(+x)} = \left(\rho \mathbf{u} u_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \mathbf{u} u_x) dx \right) dy dz$$

ΔΕ ορμής

Για όλες τις επιφάνειες του κύβου, το ισοζύγιο ορμής είναι:



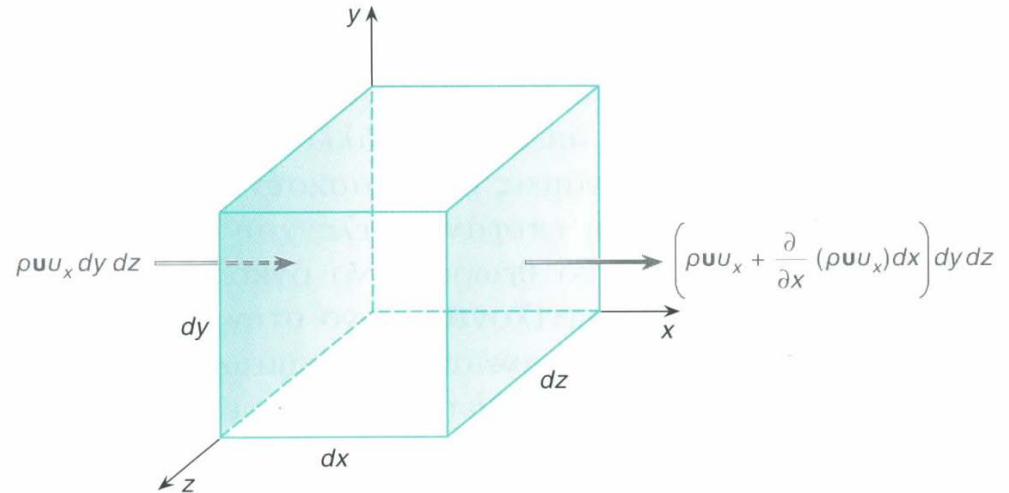
$$\dot{P}_{(-x)} = \rho \mathbf{u} u_x dy dz \quad - \quad \dot{P}_{(+x)} = \left(\rho \mathbf{u} u_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \mathbf{u} u_x) dx \right) dy dz$$

$$\dot{P}_{(-y)} = \rho \mathbf{u} u_y dx dz \quad - \quad \dot{P}_{(+y)} = \left(\rho \mathbf{u} u_y + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \mathbf{u} u_y) dy \right) dx dz$$

$$\dot{P}_{(-z)} = \rho \mathbf{u} u_z dx dy \quad - \quad \dot{P}_{(+z)} = \left(\rho \mathbf{u} u_z + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \mathbf{u} u_z) dz \right) dx dy$$

ΔΕ ορμής

Για όλες τις επιφάνειες του κύβου, το ισοζύγιο ορμής είναι:

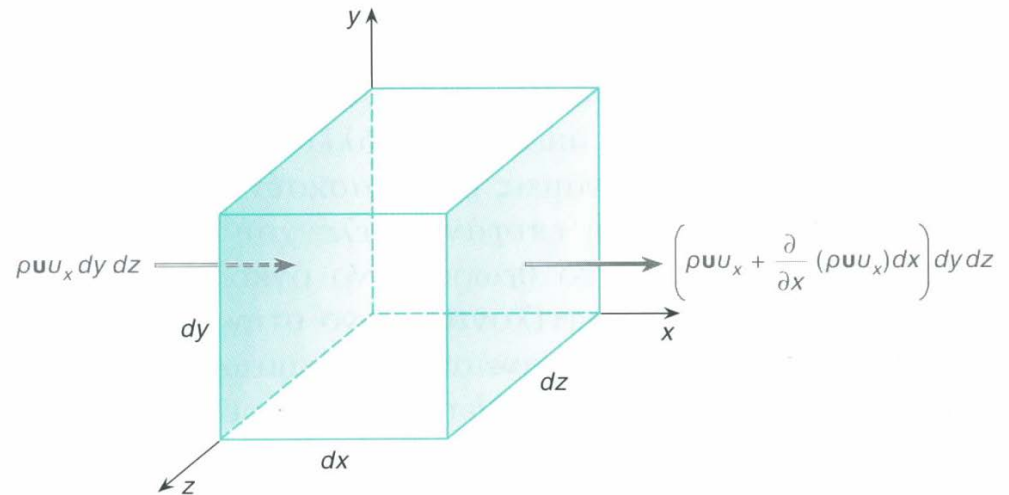


$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής} \\ \text{εισροής ορμής} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} = [\dot{P}_{(-x)} + \dot{P}_{(-y)} + \dot{P}_{(-z)}] - [\dot{P}_{(+x)} + \dot{P}_{(+y)} + \dot{P}_{(+z)}]$$

$$= - \left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho \mathbf{u} u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \mathbf{u} u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \mathbf{u} u_z) \right)$$

ΔΕ ορμής

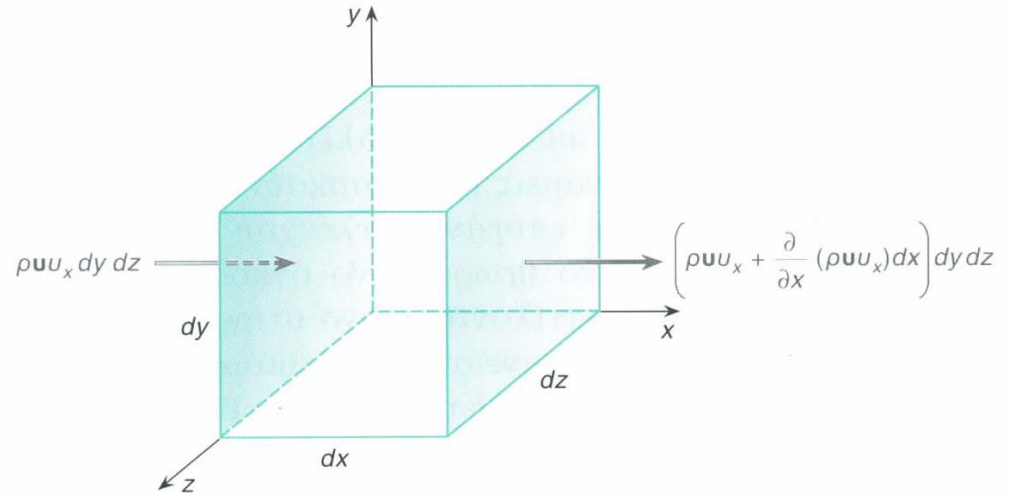
Για όλες τις επιφάνειες του κύβου, το ισοζύγιο ορμής είναι:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής} \\ \text{εισροής ορμής} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} = - (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) dx dy dz$$

ΔΕ ορμής

Στην επιφάνεια του κύβου
επιδρούν
σωματικές και
επιφανειακές δυνάμεις.



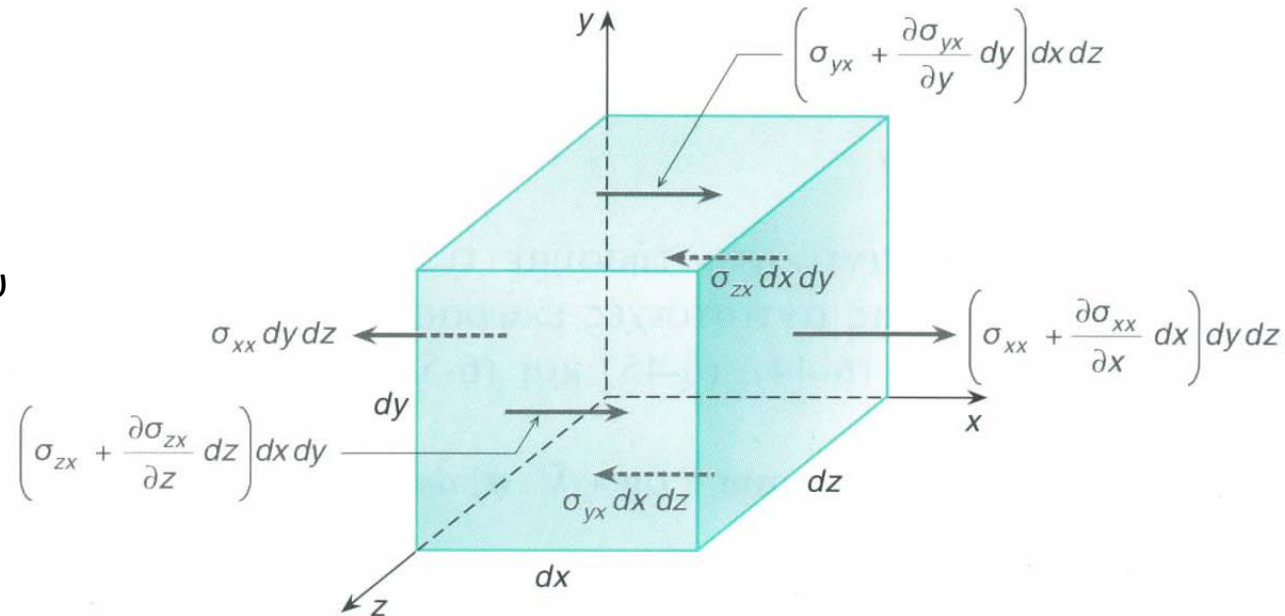
1. Σωματικές δυνάμεις (δυνάμεις πεδίου ή δυνάμεις βαρύτητας):

$$d\mathbf{F}_g = \rho \mathbf{g} dx dy dz$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{i} g_x + \mathbf{j} g_y + \mathbf{k} g_z$$

ΔΕ ορμής

Στην επιφάνεια του κύβου
επιδρούν
σωματικές και
επιφανειακές δυνάμεις.

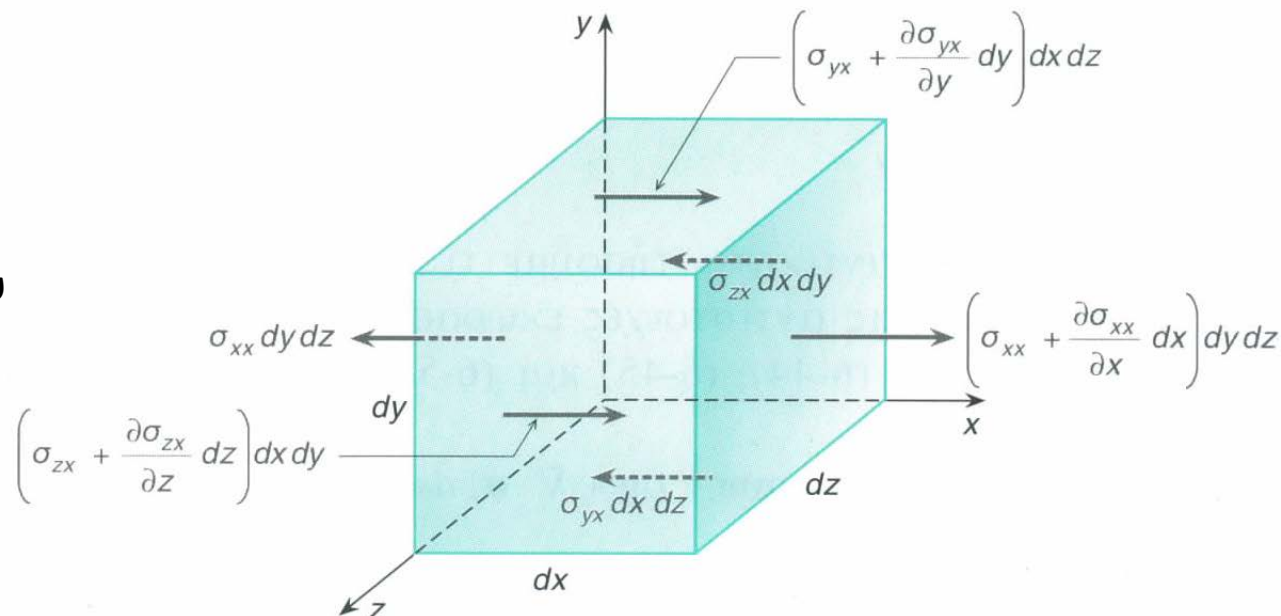


1. *Επιφανειακές δυνάμεις (έστω ότι ο κύβος δεν έρχεται σε επαφή με στερεό σώμα)
Η συνισταμένη δύναμη είναι το άθροισμα των καρτεσιανών συνιστωσών:*

$$d\mathbf{F}_s = \mathbf{i} dF_{s,x} + \mathbf{j} dF_{s,y} + \mathbf{k} dF_{s,z}$$

ΔΕ ορμής

Στην επιφάνεια του κύβου επιδρούν σωματικές και επιφανειακές δυνάμεις.

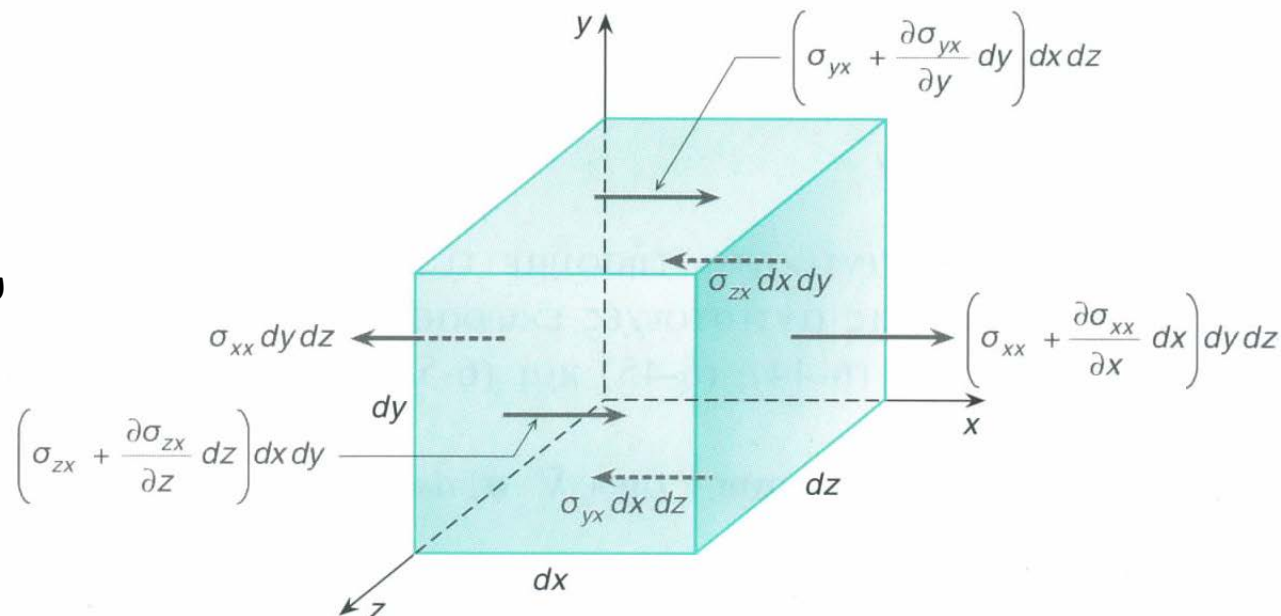


1. *Επιφανειακές δυνάμεις (έστω ότι ο κύβος δεν έρχεται σε επαφή με στερεό σώμα)
Η κάθε συνιστώσα είναι το αλγεβρικό άθροισμα των δυνάμεων που δρουν σε κάθε επίπεδο παράλληλα στον δεδομένο άξονα, έστω τον x. Π.χ. στο yz η δύναμη προκύπτει από το αλγεβρικό άθροισμα των δυνάμεων που δρουν από αριστερά και από δεξιά του κύβου*

$$\left. \begin{aligned} dF_{(-x)x} &= \sigma_{xx} dy dz \\ dF_{(+x)x} &= \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}) dx \right) dy dz \end{aligned} \right\} dF_{(+x)x} - dF_{(-x)x} = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}) dx dy dz$$

ΔΕ ορμής

Στην επιφάνεια του κύβου
επιδρούν
σωματικές και
επιφανειακές δυνάμεις.



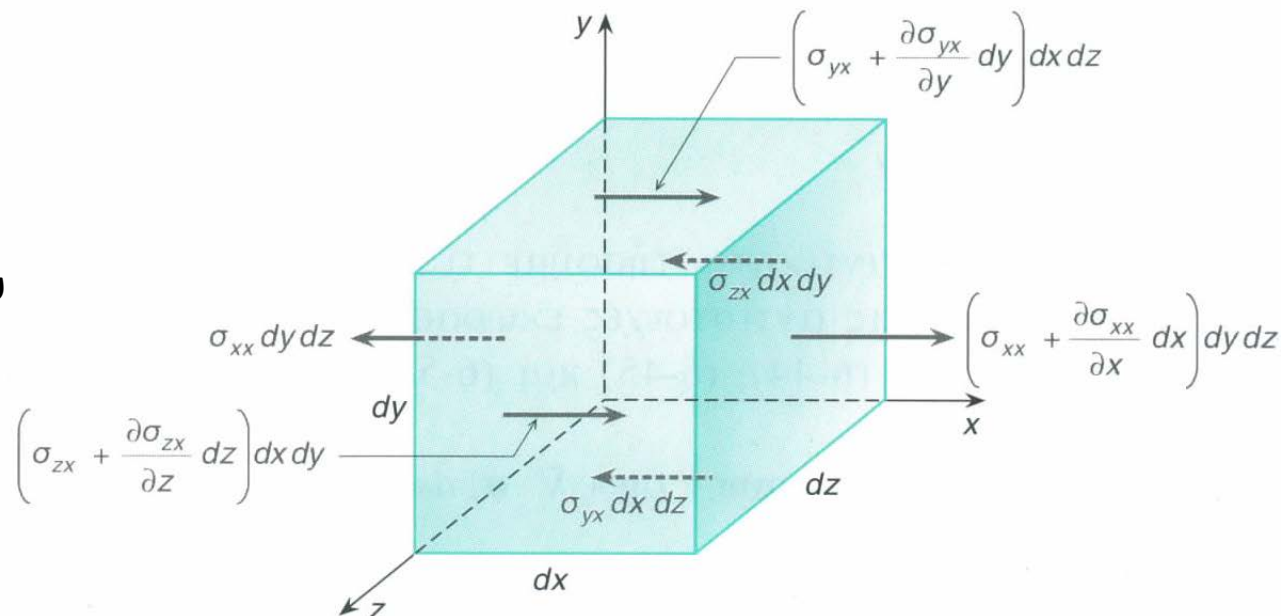
1. Επιφανειακές δυνάμεις (έστω ότι ο κύβος δεν έρχεται σε επαφή με στερεό σώμα)
Αντίστοιχα στα επίπεδα xy και xz δρουν διατμητικές τάσεις:

$$dF_{(+y)x} - dF_{(-y)x} = \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yx}) dx dy dz$$

$$dF_{(+z)x} - dF_{(-z)x} = \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zx}) dx dy dz$$

ΔΕ ορμής

Στην επιφάνεια του κύβου
επιδρούν
σωματικές και
επιφανειακές δυνάμεις.



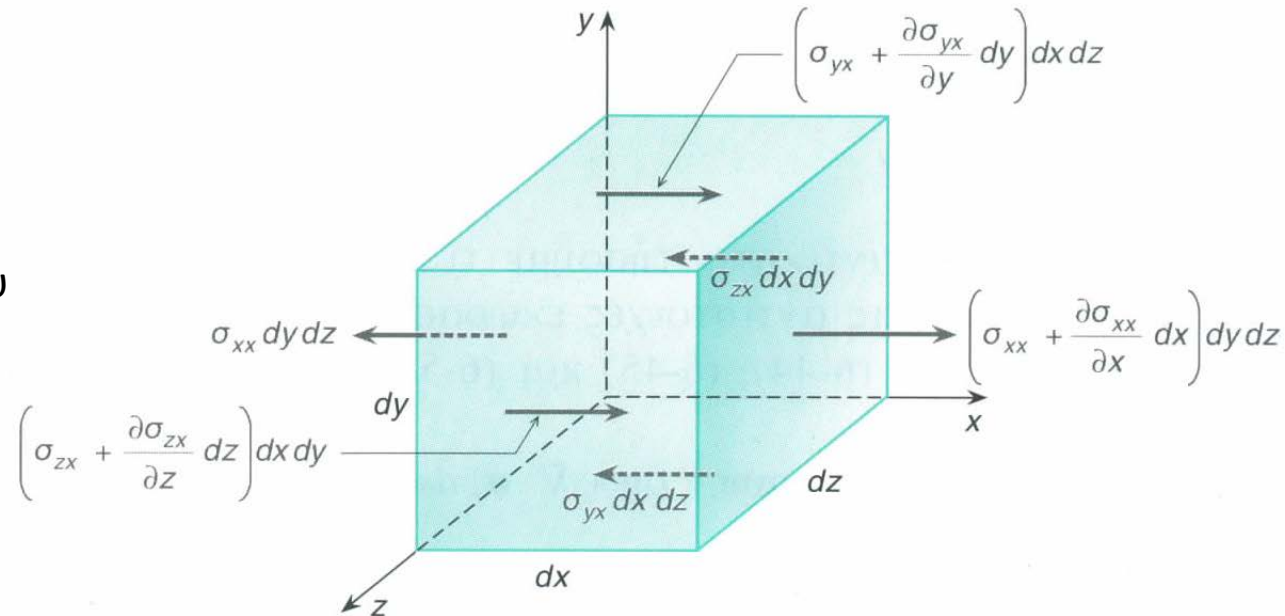
1. Επιφανειακές δυνάμεις (έστω ότι ο κύβος δεν έρχεται σε επαφή με στερεό σώμα)
Αντίστοιχα στα επίπεδα xy και xz δρουν διατμητικές τάσεις:

$$dF_{(+y)x} - dF_{(-y)x} = \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yx}) dx dy dz$$

$$dF_{(+z)x} - dF_{(-z)x} = \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zx}) dx dy dz$$

ΔΕ ορμής

Στην επιφάνεια του κύβου επιδρούν σωματικές και επιφανειακές δυνάμεις.



1. Το αλγεβρικό άθροισμα δίνει την δύναμη στον x:

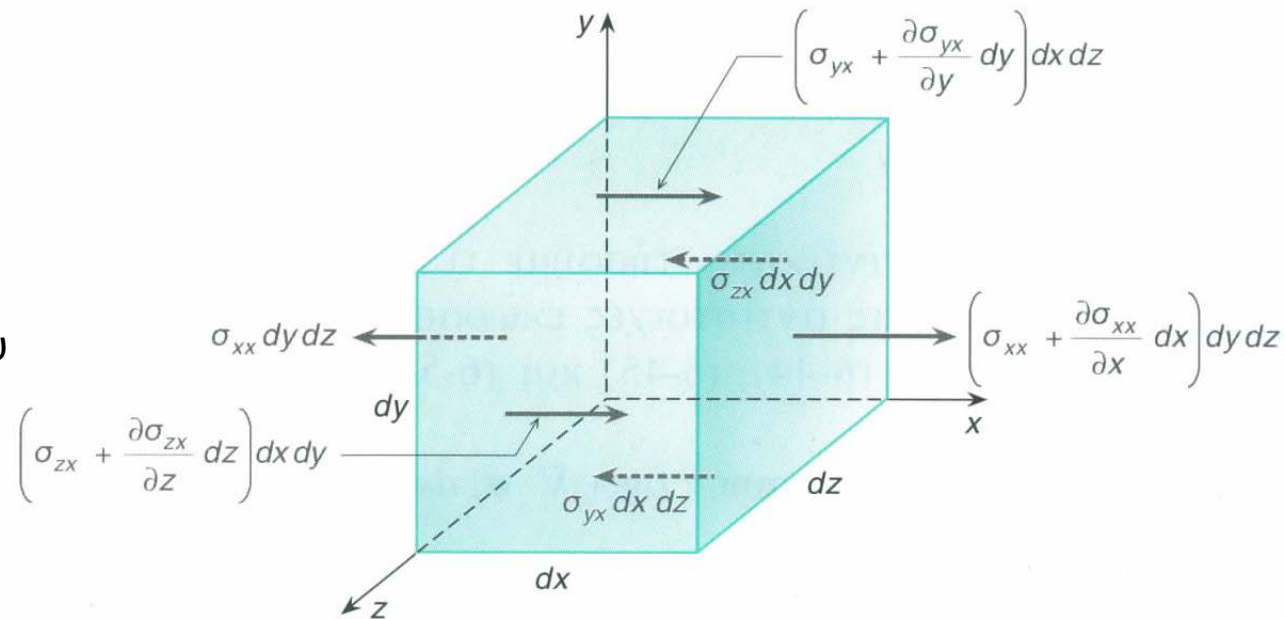
$$dF_{s, x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zx}) \right) dx dy dz$$

Ή σε διανυσματικό συμβολισμό αφού $\boldsymbol{\sigma}_x = \mathbf{i}\sigma_{xx} + \mathbf{j}\sigma_{xy} + \mathbf{k}\sigma_{xz}$

$$dF_{s, x} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_x) dx dy dz$$

ΔΕ ορμής

Στην επιφάνεια του κύβου
επιδρούν
σωματικές και
επιφανειακές δυνάμεις.



Για τις τρεις διαστάσεις:

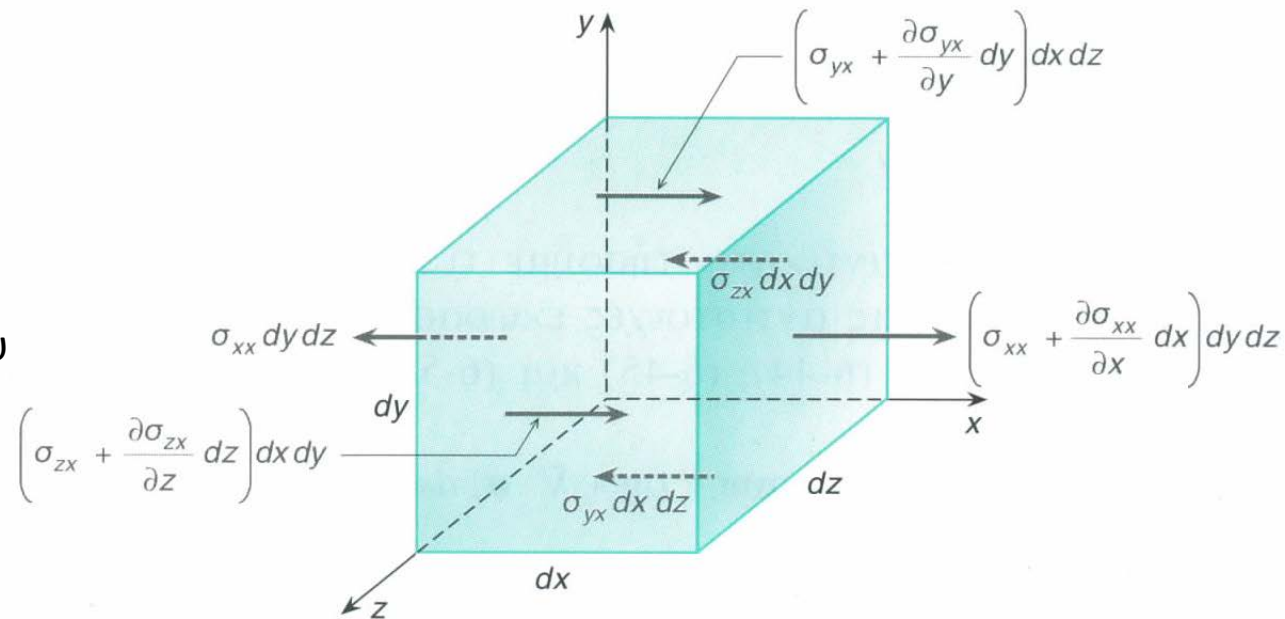
$$dF_{s, x} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_x) dx dy dz$$

$$dF_{s, y} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_y) dx dy dz$$

$$dF_{s, z} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_z) dx dy dz$$

ΔΕ ορμής

Στην επιφάνεια του κύβου επιδρούν σωματικές και επιφανειακές δυνάμεις.



Έτσι η συνισταμένη προκύπτει πολλαπλασιάζοντας με το μοναδιαίο διάνυσμα στην αντίστοιχη κατεύθυνση και προσθέτοντας τις συνιστώσες:

$$d\mathbf{F}_s = [\nabla \cdot (\mathbf{i}\sigma_x + \mathbf{j}\sigma_y + \mathbf{k}\sigma_z)] dx dy dz$$

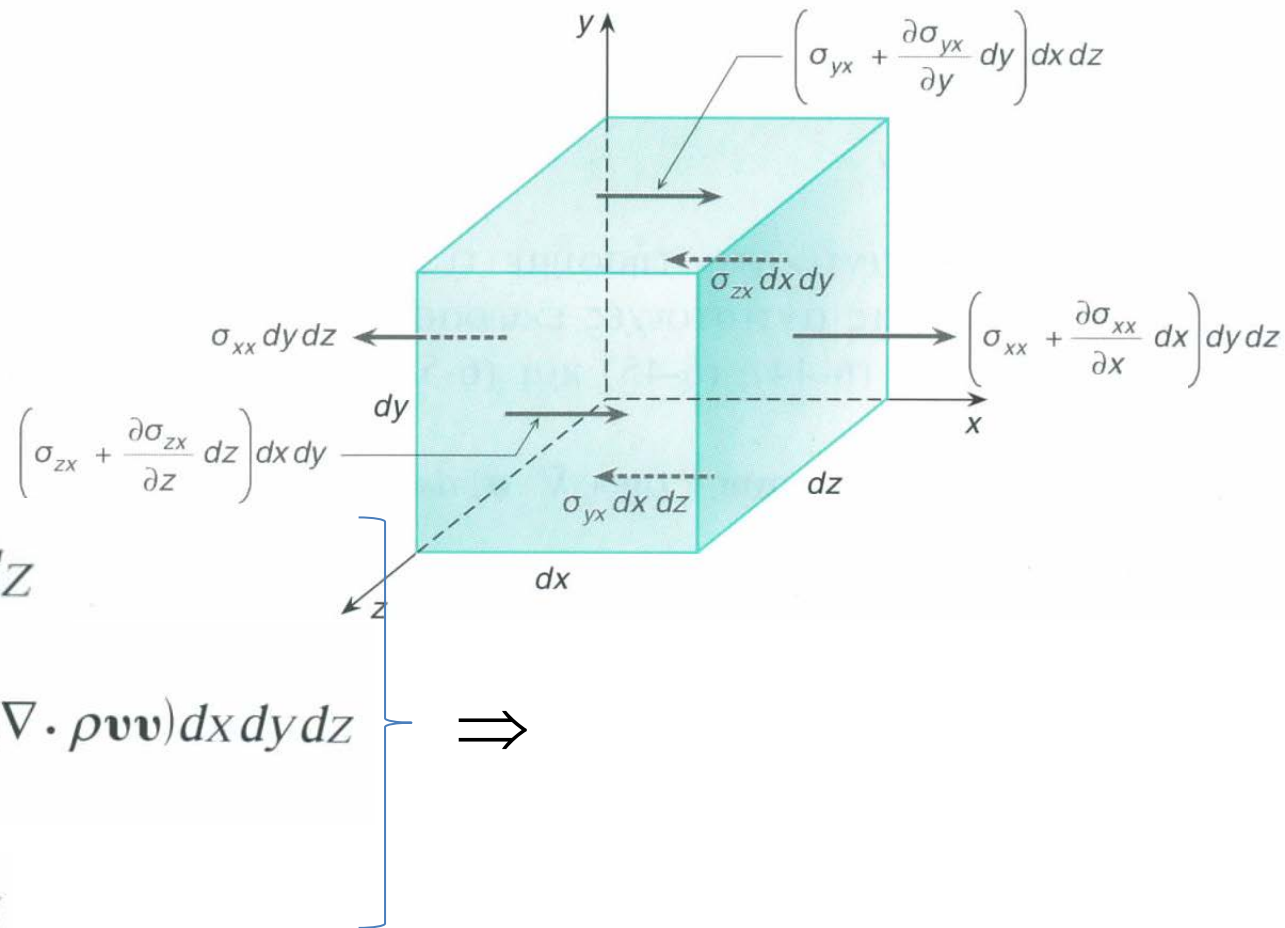
Αφού:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i}\sigma_x + \mathbf{j}\sigma_y + \mathbf{k}\sigma_z$$

⇒

$$d\mathbf{F}_s = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dx dy dz$$

ΔΕ ορμής



$$d\mathbf{F}_s = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dx dy dz$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής} \\ \text{εισροής ορμής} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} = - (\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}) dx dy dz \quad \Rightarrow$$

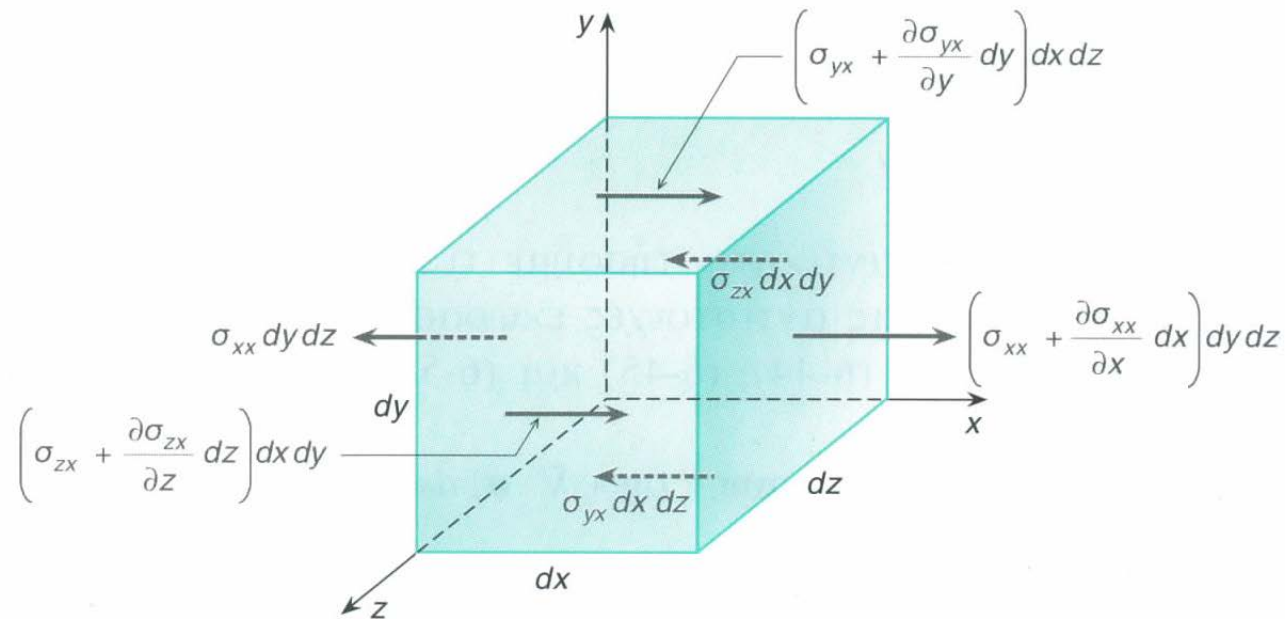
$$d\mathbf{F}_g = \rho \mathbf{g} dx dy dz$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dx dy dz = (- \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dx dy dz \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) = - \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

ΔΕ ορμής

Τύπου Euler διαφορική
εξίσωση ορμής



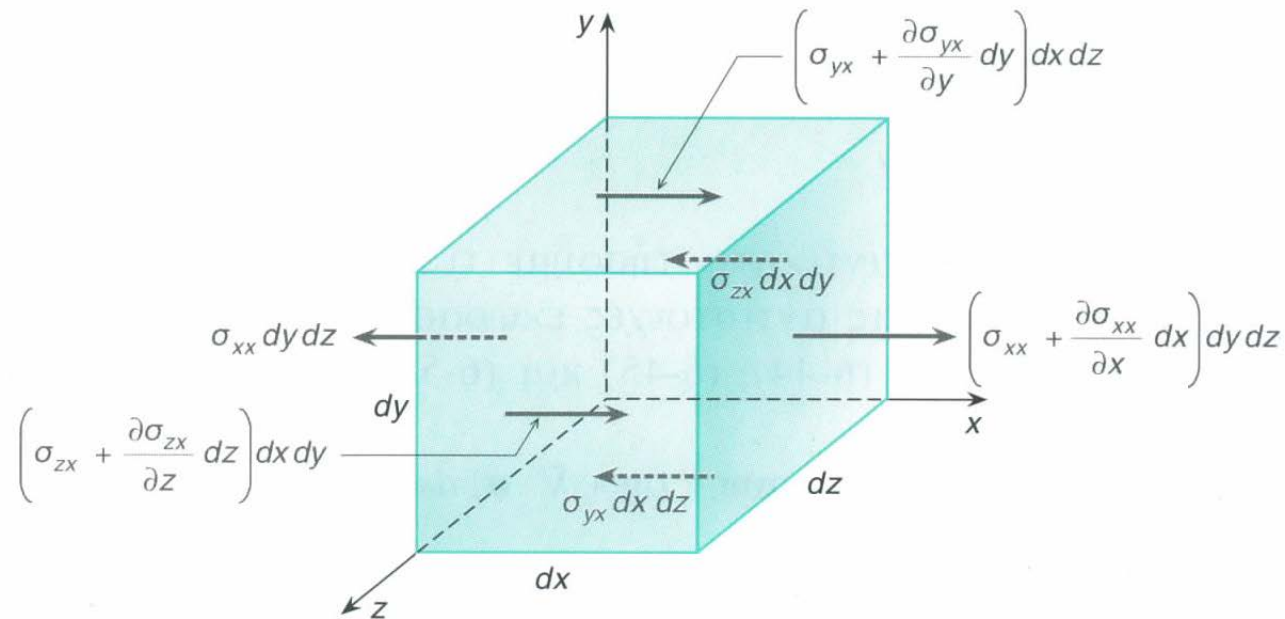
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) = - \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) &= - \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\sigma} &= - p \mathbf{U} + \boldsymbol{\tau} \\ \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} &= \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{u} (\nabla \cdot \rho \mathbf{u}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

ΔΕ ορμής

Τύπου Euler διαφορική
εξίσωση ορμής



$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

(Μάζα) × (Επιτάχυνση) = (Άθροισμα εξωτερικών δυνάμεων)

Πίνακας 6-1 Καρτεσιανές συνιστώσες της διαφορικής εξίσωσης ορμής

x - Διεύθυνση

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (\alpha)$$

y - Διεύθυνση

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (\beta)$$

z - Διεύθυνση

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (\gamma)$$

Πίνακας 6-2 Κυλινδρικές συνιστώσες της διαφορικής εξίσωσης ορμής

r-Διεύθυνση

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} \right) \quad (\alpha)$$

\theta-Διεύθυνση

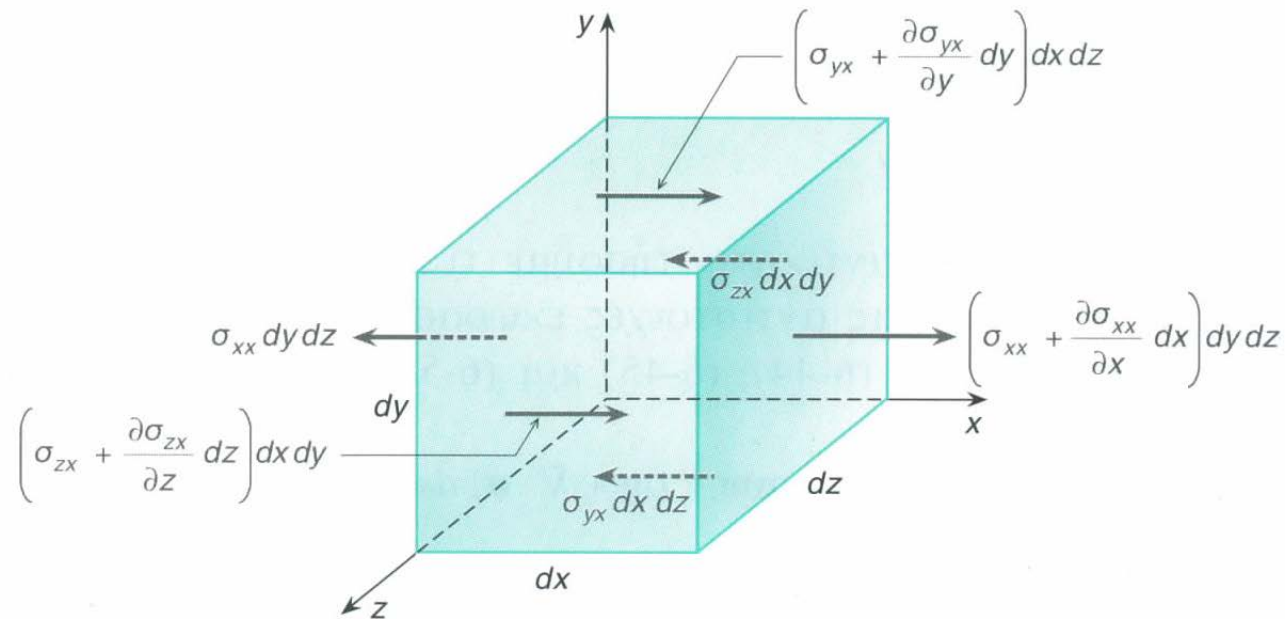
$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} \right) \quad (\beta)$$

z-Διεύθυνση

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (\gamma)$$

ΔΕ ορμής

Νευτωνικά ρευστά



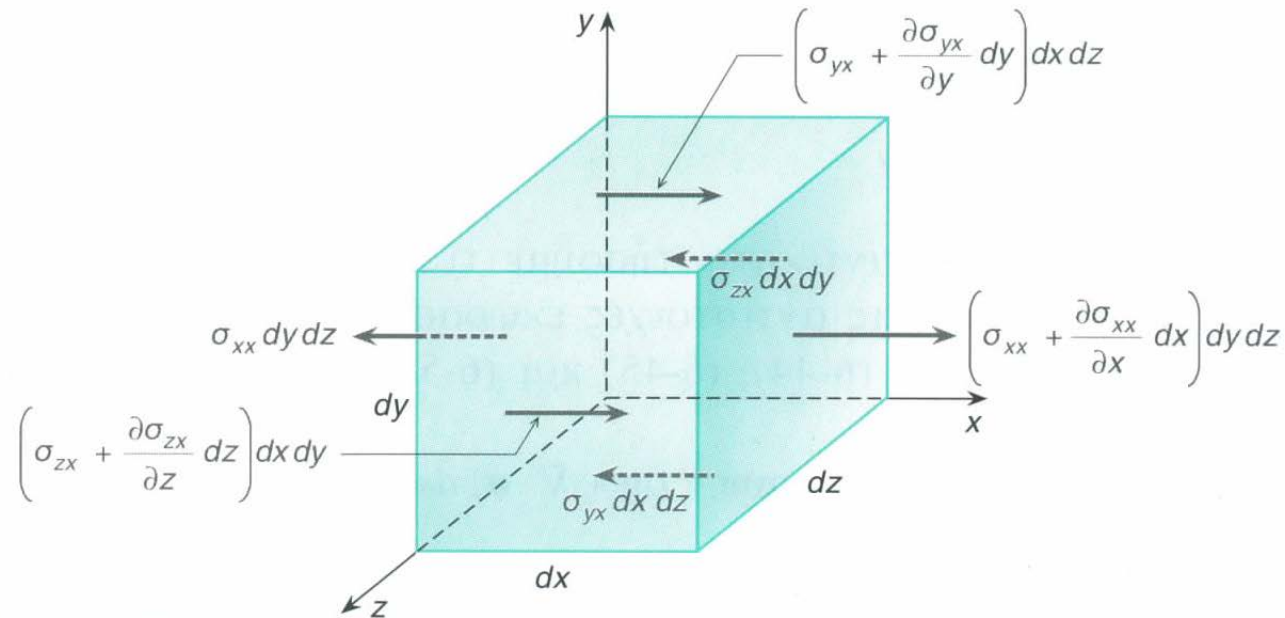
$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \mathbf{U}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \left\{ \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \mathbf{U} \right\}$$

ΔΕ ορμής

Νευτωνικά ρευστά
& Ασυμπίεστη ροή
& σταθερό ιξώδες

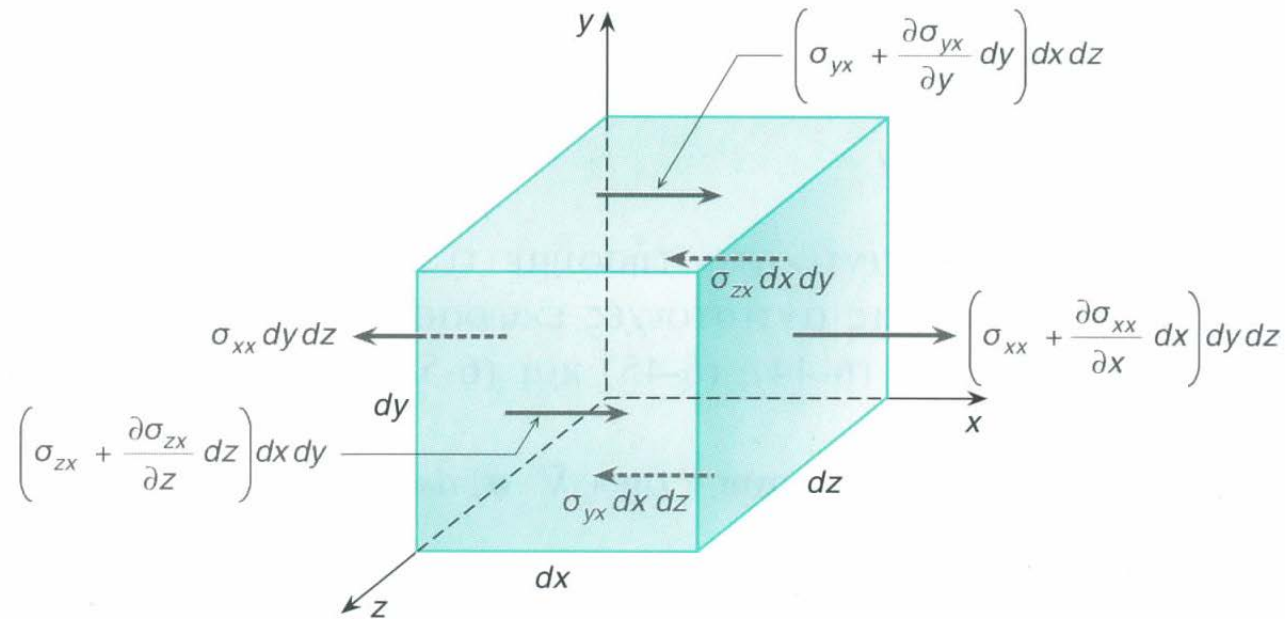


$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} &= \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \mathbf{U} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}$$

ΔΕ ορμής

Νευτωνικά ρευστά
& Ασυμπίεστη ροή
& σταθερό ιξώδες



Για Ασυμπίεστη ροή ισχύει:

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla^2 \mathbf{v}$$

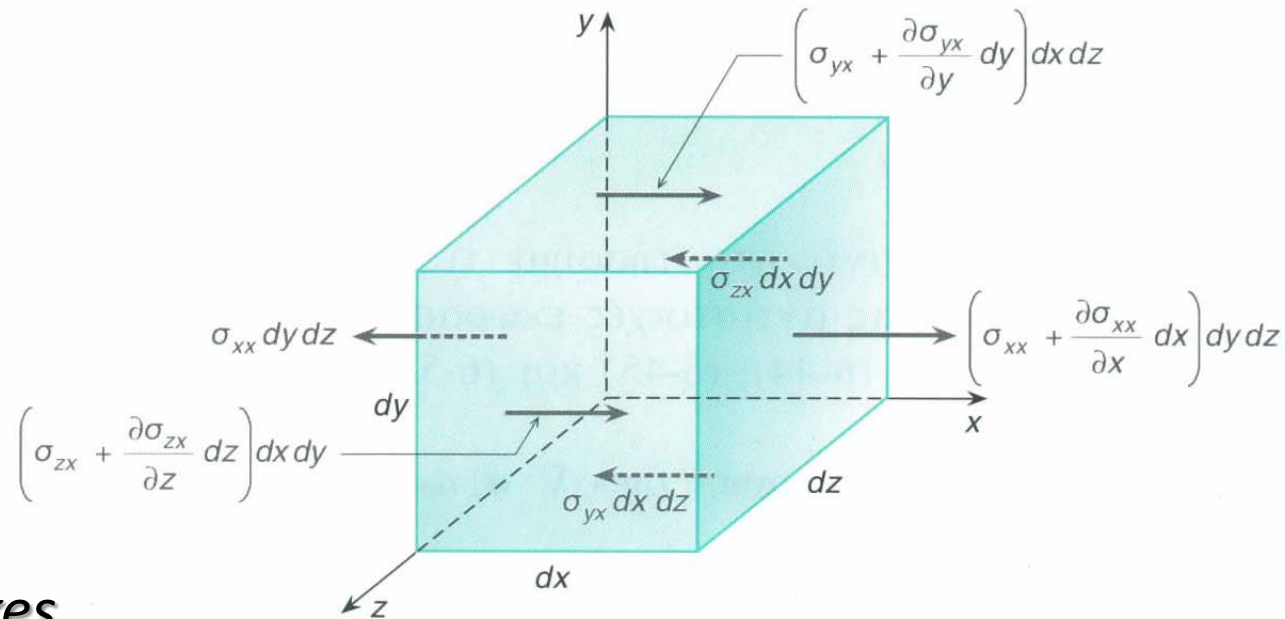
Εξίσωση *Navier Stokes*

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{Κατά Lagrange})$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{Κατά Euler})$$

ΔΕ ορμής

Νευτωνικά ρευστά
& Ασυμπίεστη ροή
& σταθερό ιξώδες



Εξίσωση *Navier Stokes*

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{Κατά Lagrange})$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{Κατά Euler})$$

Για άτριβη ροή:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p \quad (\text{Εξίσωση Euler})$$

Πίνακας 6-3 Καρτεσιανές συνιστώσες της εξίσωσης Navier-Stokes

x - Διεύθυνση

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (\alpha)$$

y - Διεύθυνση

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \quad (\beta)$$

z - Διεύθυνση

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (\gamma)$$

Πίνακας 6-4 Κυλινδρικές συνιστώσες της εξίσωσης Navier-Stokes

r-Διεύθυνση

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$$
$$+ \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \quad (\alpha)$$

\theta-Διεύθυνση

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$
$$+ \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (\beta)$$

z-Διεύθυνση

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$
$$+ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (\gamma)$$