

ΝΕΥΤΩΝΙΚΑ ΚΑΙ ΜΗ ΝΕΥΤΩΝΙΚΑ ΡΕΥΣΤΑ

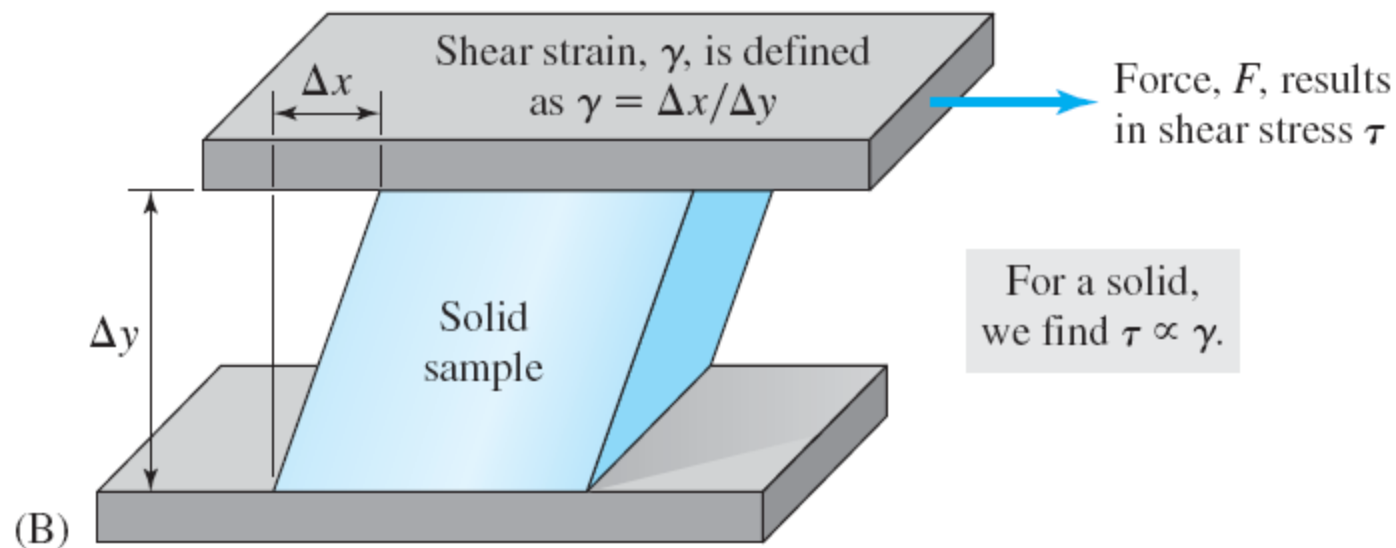
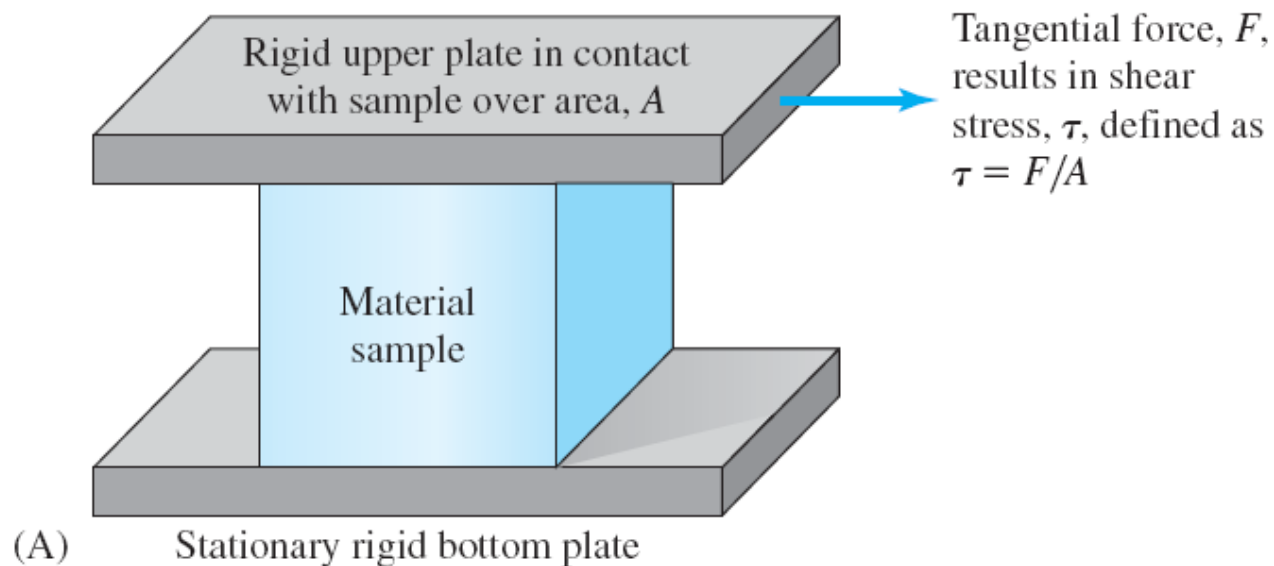
6^ο Εξάμηνο Μηχανικών Επιστήμης Υλικών

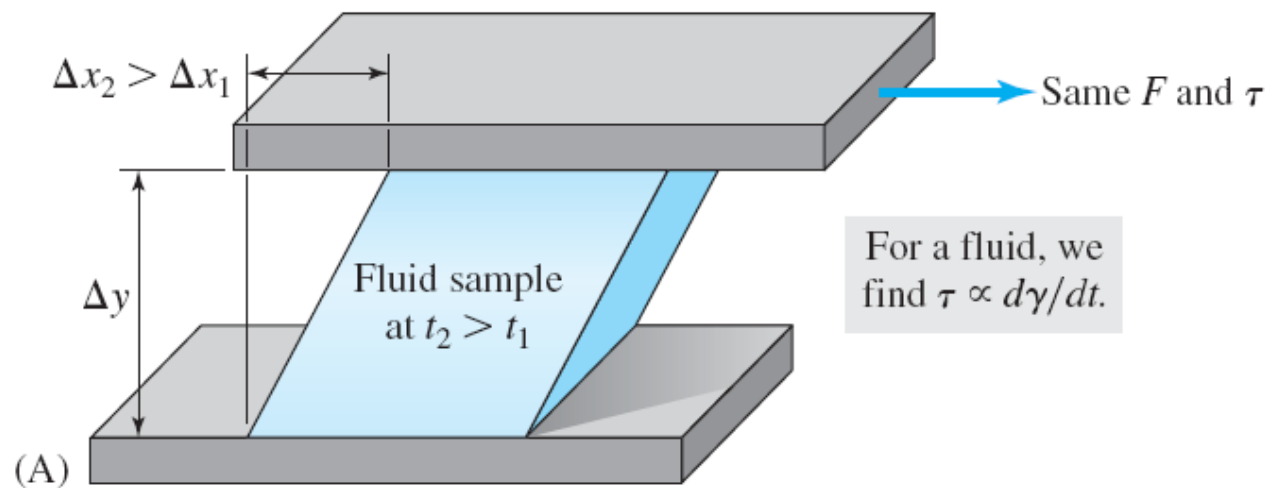
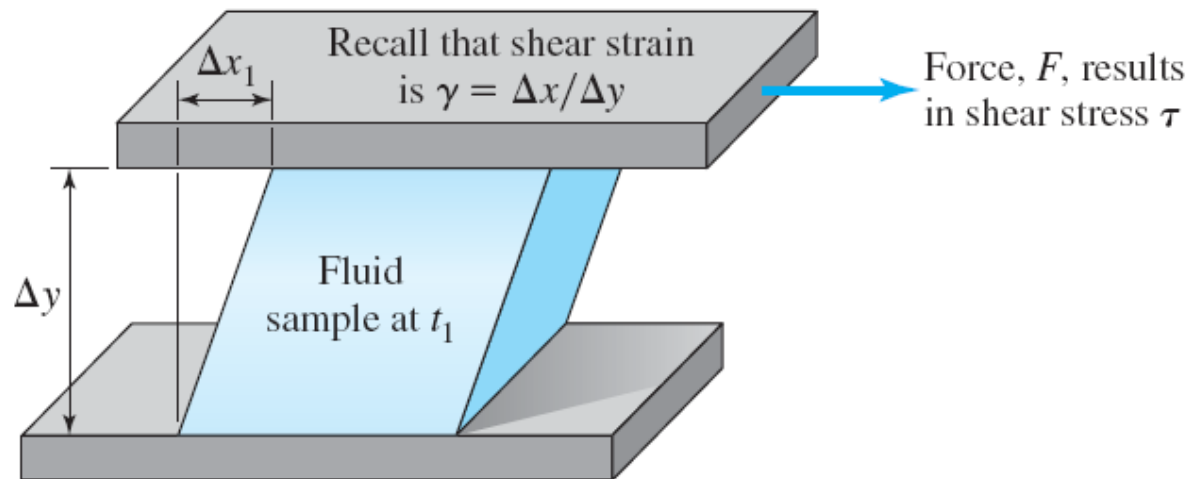
Εισαγωγή

- Ρεολογική συμπεριφορά ρευστών
 - Υλική σχέση
 - Νευτωνικά και μη νευτωνικά ρευστά
 - Τανυστής ιξώδους Τάσης και ρυθμού παραμόρφωσης
- Ιδιότητες νευτωνικών ρευστών
 - Στρωτή ροή
 - Μονοδιάστατη ροή (Newton)
 - Τρισδιάστατη ροή (Stokes)
 - Υλική σχέση νευτωνικών ρευστών σε 3D (Newton Poisson)
- Μη νευτωνικά ρευστά
 - Φαινόμενο ιξώδες
 - Ανεξάρτητα από το χρόνο
 - Πλαστικά
 - Ψευδοπλαστικά
 - διασταλτικά
 - Εξαρτωμένα από το χρόνο
 - Θιξοτροπικά
 - Ρεοπηκτικά
 - Ιξωδοελαστικά

Υλική σχέση

- Η σχέση ιξώδους τάσης με ρυθμούς παραμόρφωσης
 - Γιατί στα ρευστά συσχετίζεται η τάση με το ρυθμό παραμόρφωσης και όχι με την παραμόρφωση;





Υλική σχέση

- Γιατί στα ρευστά συσχετίζεται η τάση με το ρυθμό παραμόρφωσης και όχι με την παραμόρφωση;

Ορισμός

Ρευστό είναι το υλικό σώμα που παραμορφώνεται συνεχώς υπό την επίδραση διατμητικής τάσης

Υλική σχέση

Κατά Gibbs:

$$\boldsymbol{\tau} = f(\dot{\boldsymbol{\gamma}})$$

$\boldsymbol{\tau}$: ο τανυστής ιξωδών τάσεων

$\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ ο τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης

Με δεικτες:

$$\tau_{ij} = g(\dot{\gamma}_{ij})$$

τ_{ij}

οι συνιστώσες των παραπάνω τανυστών

$\dot{\gamma}_{ij}$

Υλική σχέση

Κατά Gibbs:

$$\boldsymbol{\tau} = f(\dot{\boldsymbol{\gamma}})$$

$\boldsymbol{\tau}$: ο τανυστής ιξωδών τάσεων

$\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ ο τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης

Με δεικτες:

$$\tau_{ij} = g(\dot{\gamma}_{ij})$$

τ_{ij}

οι συνιστώσες των παραπάνω τανυστών

$\dot{\gamma}_{ij}$

Νευτωνικά ρευστά

Ο νόμος του Newton:

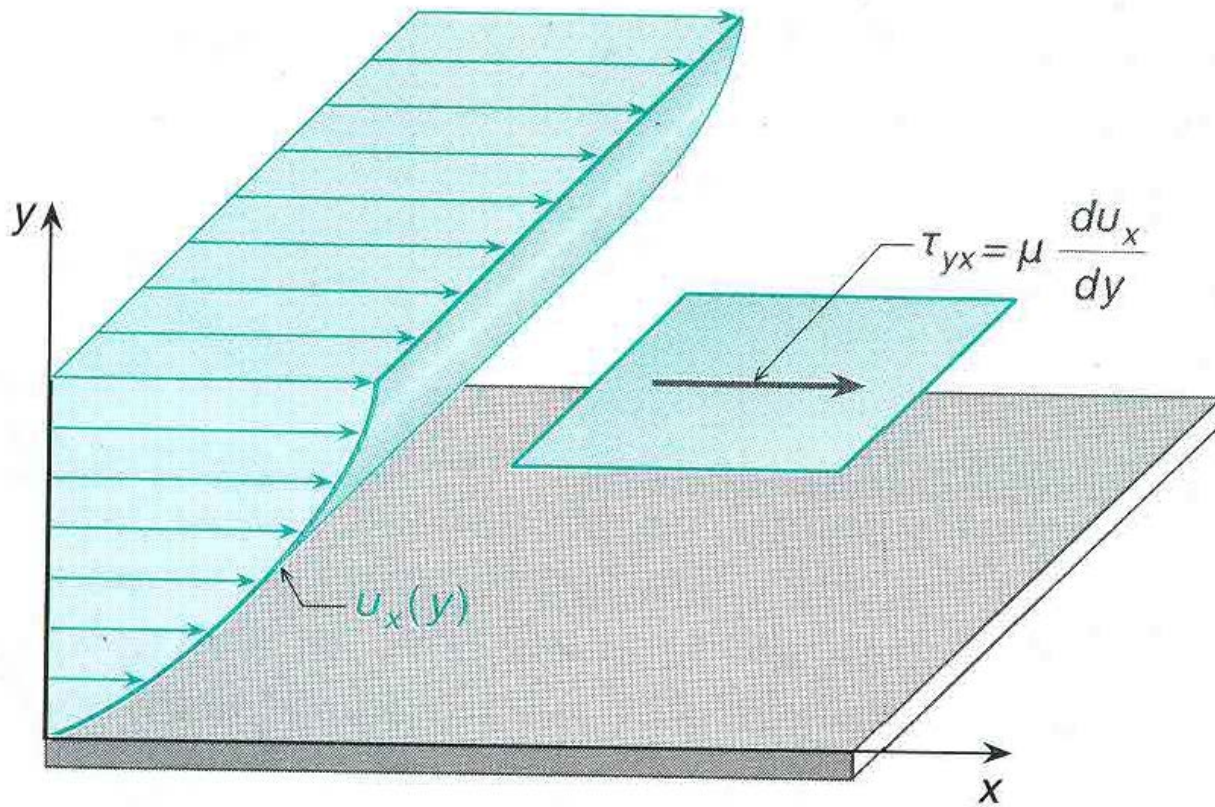
Για μονοδιάστατη, στρωτή ροή

$$\frac{\text{Ιξώδης διατμητική τάση}}{\text{Ρυθμός γωνιακής παραμόρφωσης}} = \text{Ιξώδες}$$

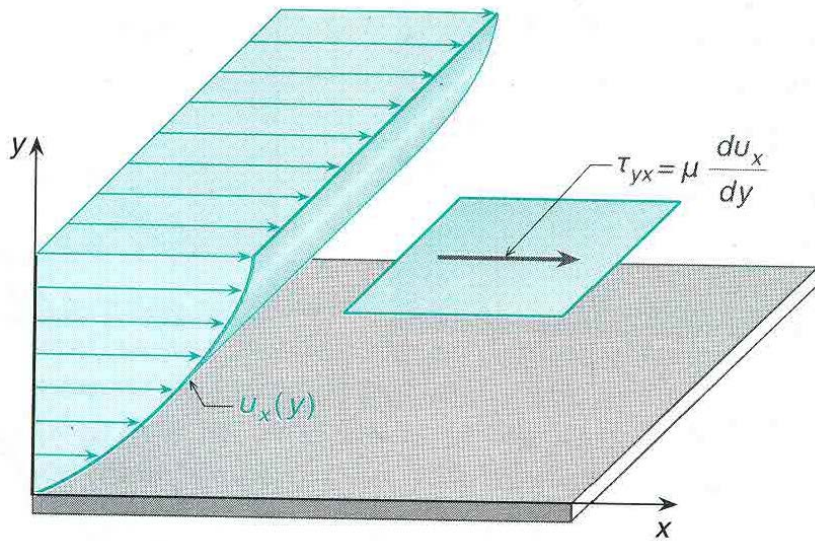
Ποια είναι τυπικά νευτωνικά ρευστά;

Από τι εξαρτάται το ιξώδες;

Νευτωνικά ρευστά



Νευτωνικά ρευστά



$$\tau_{yx} = \mu \dot{\gamma}_{yx}$$

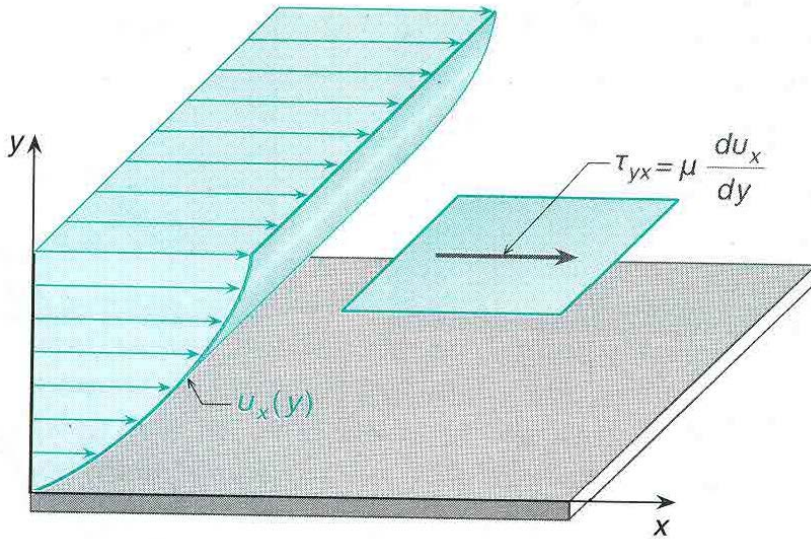
$$\dot{\gamma}_{yx} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma}_{yx} = \frac{dv_x}{dy}$$

A blue arrow points from the $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ term in the first equation to a zero, indicating that this term is zero for the flow between parallel plates.

Φυσική ερμηνεία του Poise (wikipedia):

If a [fluid](#) with a viscosity of one Pa·s is placed between two plates, and one plate is pushed sideways with a [shear stress](#) of one [pascal](#), it moves a distance equal to the thickness of the layer between the plates in one [second](#).

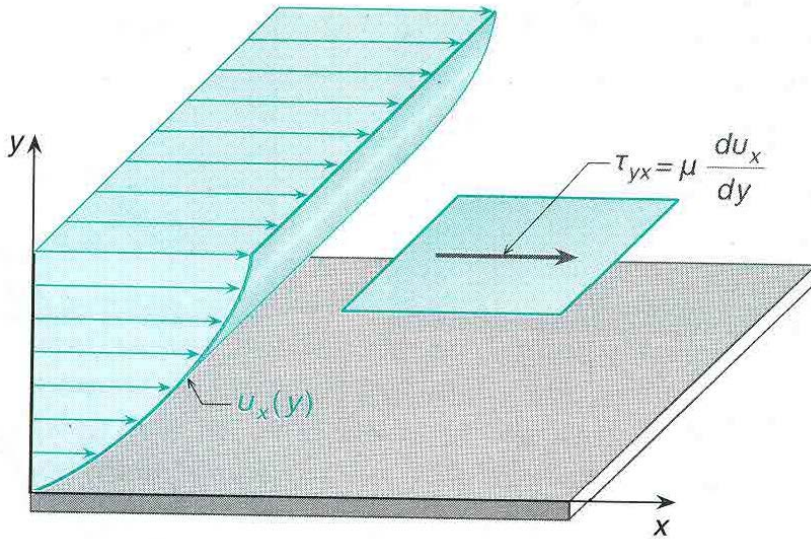
Νευτωνικά ρευστά



$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_{yx} &= \frac{dv_x}{dy} \\ \tau_{yx} &= \mu \dot{\gamma}_{yx} \end{aligned} \right\} \tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

Νόμος ιώδους του Newton **για μονοδιάστατη στρωτή ροή**

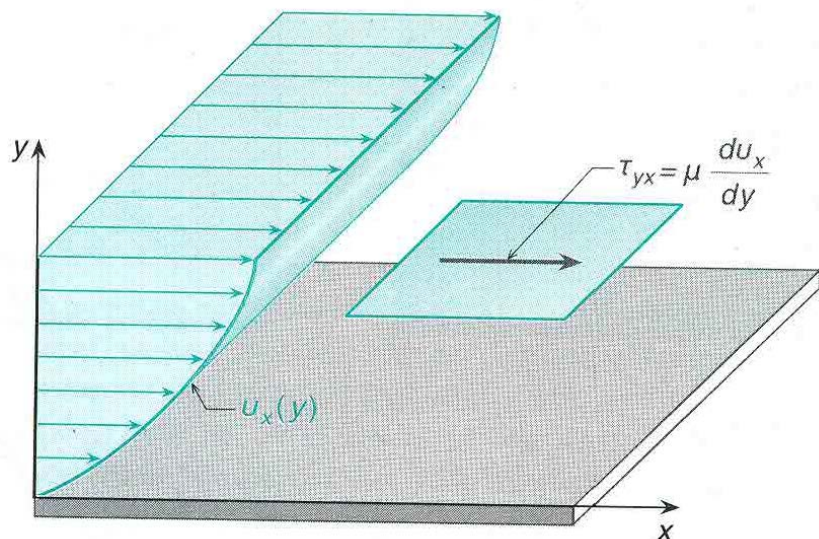
Νευτωνικά ρευστά



$$\tau_{yx} = 0, \quad \text{όταν} \quad \frac{dv_x}{dy} = 0$$

Σε ποιες περιπτώσεις ισχύει η παραπάνω σχέση;

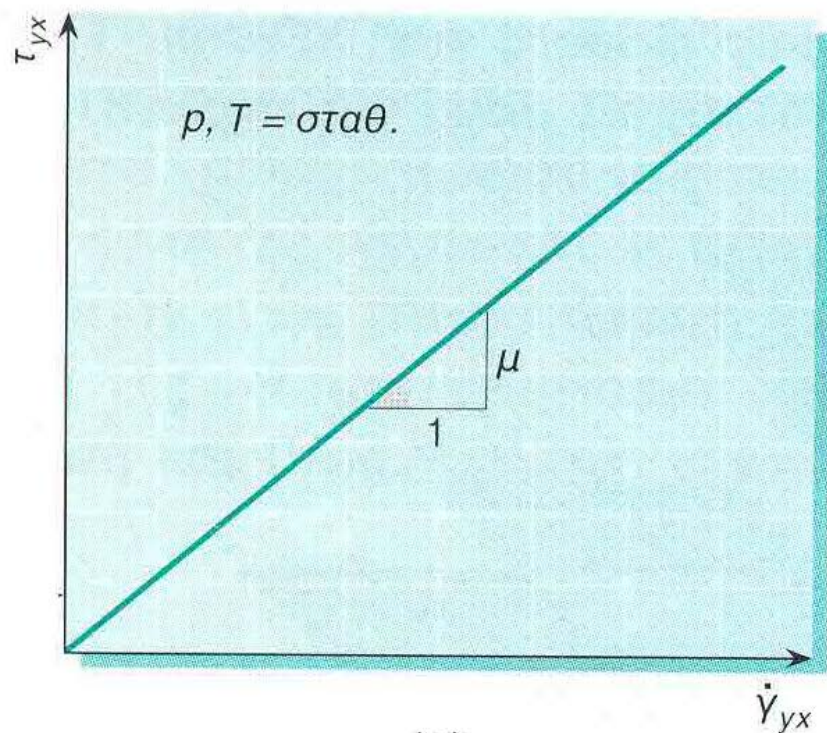
Νευτωνικά ρευστά



$$\tau_{yx} = 0, \quad \text{όταν} \quad \frac{dv_x}{dy} = 0$$

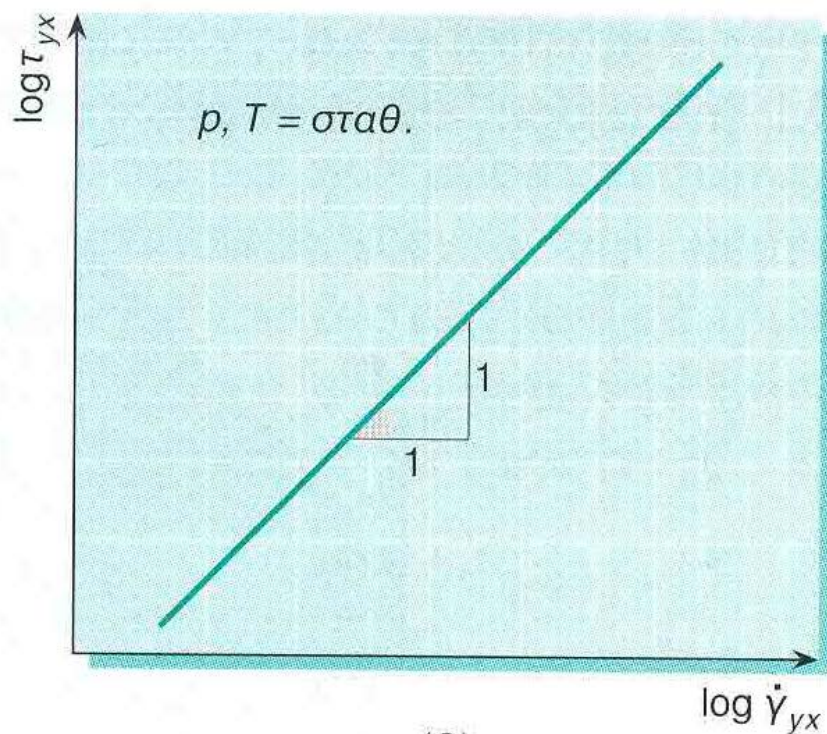
1. Ακρότατα ή σημεία καμπής της συνάρτησης της ταχύτητας
2. Ομοιόμορφη ταχύτητα
3. Ακίνητο ρευστό

Ρεολογικό διάγραμμα



(α)

Α. απλό διάγραμμα



(β)

Β. Λογαριθμικό διάγραμμα

Σχέσεις Ιξώδους Stokes

Για τρισδιάστατη στρωτή ροή νευτωνικού ρευστού:

$$\tau_{ij} = \mu \dot{\gamma}_{ij}, \quad \forall i \neq j$$

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \forall i \neq j$$

Σχέσεις Ιξώδους Stokes

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \forall i \neq j$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

Σχέσεις Ιξώδους Stokes

$$\tau_{xx} = 2\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial X} \right) + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial Z} \right) + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial X} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial Z}$$

Σχέσεις Ιξώδους Stokes

- Διαστολικό ιξώδες κ :
 - οφείλεται στην περιστροφική κίνηση των μορίων του ρευστού (εάν υπάρχει)
 - Θεωρείται μηδέν για μονοατομικά ρευστά
 - σε κάποιες περιπτώσεις είναι μεγαλύτερο από το μ
- Προσδιορίζεται πειραματικά ή αναλυτικά από τις σχέσεις *Stokes*

Σχέσεις Ιξώδους Stokes

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\tau_{xx} = 2\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right]$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right]$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right]$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\tau_{rr} = 2\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right]$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right]$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Νόμος Newton Poisson

Κατά Stokes: $\boldsymbol{\tau} = \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \mathbf{U}$

Για ασυμπίεστη ροή

(διαφορική εξίσωση συνέχειας)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}}$$

Νόμος Newton Poisson

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\tau} = \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$$

με πίνακες

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \mu \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \right]$$

Ή με δείκτες

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Το πρόβλημα: Το πεδίο ταχύτητας ενός νευτωνικού ρευστού, το οποίο έχει ιξώδες $\mu = 1,5 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, δίνεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = 4xyz\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} - 2yz^2\mathbf{k} \quad (\text{m/s}) \quad (1)$$

όπου οι χωρικές συντεταγμένες x , y και z είναι σε μέτρα. Να υπολογιστούν όλες οι τάσεις, κάθετες και διατμητικές, που ασκούνται στο σημείο $(2, 1, 1)$ του πεδίου, αν η πίεση σε αυτό είναι $p = 80 \text{ kPa}$.

Μη νευτωνικά ρευστά

$$\tau \neq \mu \dot{\gamma}$$



Non newtonian fluid_ IT'S ALIVE! [HD].mp4



Ελεγκτήστε την κατάσταση εδώ
starch

From Wikipedia: Oobleck on a subwoofer. Applying force to oobleck, by sound waves in this case, makes the non-Newtonian fluid thicken.[[]

Μη νευτωνικά ρευστά

$$\tau \neq \mu \dot{\gamma}$$

Η σχέση μεταξύ της διατμητικής τάσης και του ρυθμού παραμόρφωσης δεν είναι γραμμική.

ή

Η καμπύλη τ / γ δεν είναι ευθεία γραμμή

Το ιξώδες εξαρτάται (εκτός των καταστατικών μεγεθών):

- ✓ Από το ρυθμό διάτμησης
- ✓ Από το χρόνο διάτμησης
- ✓ Από τη γεωμετρία

Μη νευτωνικά ρευστά

$$\tau \neq \mu \dot{\gamma}$$

Φαινόμενο ιξώδες

Σε οποιεσδήποτε συνθήκες ορίζουμε το :

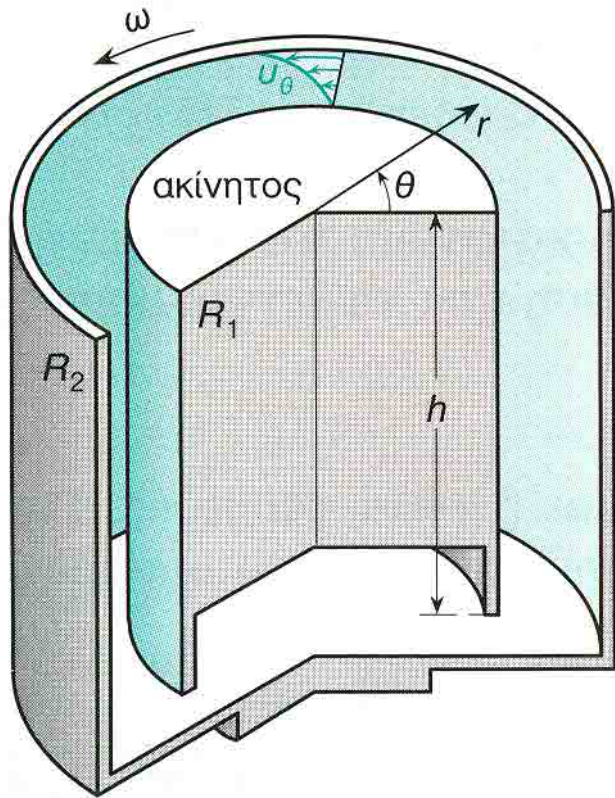
$$\mu_{\varphi} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$$

Το φαινόμενο ιξώδες είναι σταθερό και αποτελεί ιδιότητα του υλικού στην περίπτωση που το ρευστό είναι νευτώνιο.

Μη νευτωνικά ρευστά

Ρεολογία:

Η μελέτη των υλικών σχέσεων που διέπουν τη ροή υλικών



Στο ιξωδόμετρο Couette, για νευτώνιο ρευστό:

$$\dot{\gamma} = \frac{u_\theta \big|_{r=R_2}}{b} = \frac{\omega R_2}{R_2 - R_1}$$

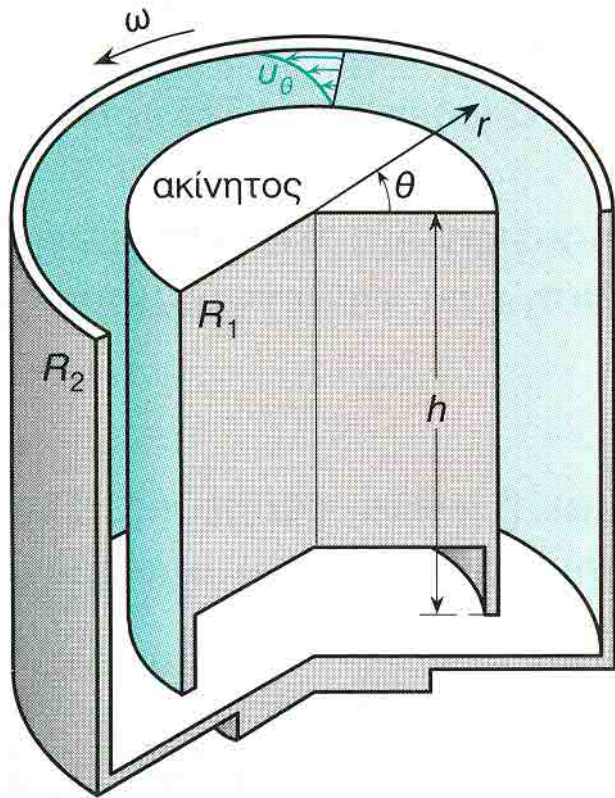
$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{\mathcal{M} / R_2}{A}$$

$$\tau = \mu \dot{\gamma}$$

Μη νευτωνικά ρευστά

Ταξινόμηση

- **MNP ανεξάρτητα του χρόνου**
 - Το φαινόμενο ιξώδες μπορεί να εξαρτάται από το μέγεθος της διάτμησης
- **MNP εξαρτώμενα από τον χρόνο**
 - Το φαινόμενο ιξώδες μπορεί να εξαρτάται από το ρυθμό της διάτμησης αλλά και από το ιστορικό διατμητικής καταπόνησης (φαινόμενο μνήμης)
- **MNP ιξωδοελαστικά**
 - Παρουσιάζουν μικτή συμπεριφορά στερεού και ρευστού



Μη νευτωνικά ρευστά

- **MNP ανεξάρτητα του χρόνου**
 - *Το φαινόμενο ιξώδες μπορεί να εξαρτάται από το μέγεθος της διάτμησης*
- ✓ Πλαστικά
- ✓ Ψευδοπλαστικά
- ✓ Διασταλτικά

$$\dot{\gamma} = f(\tau)$$

Μη νευτωνικά ρευστά

➤ ΜΝΡ ανεξάρτητα του χρόνου

✓ Πλαστικά

$$\dot{\gamma} = f(\tau)$$

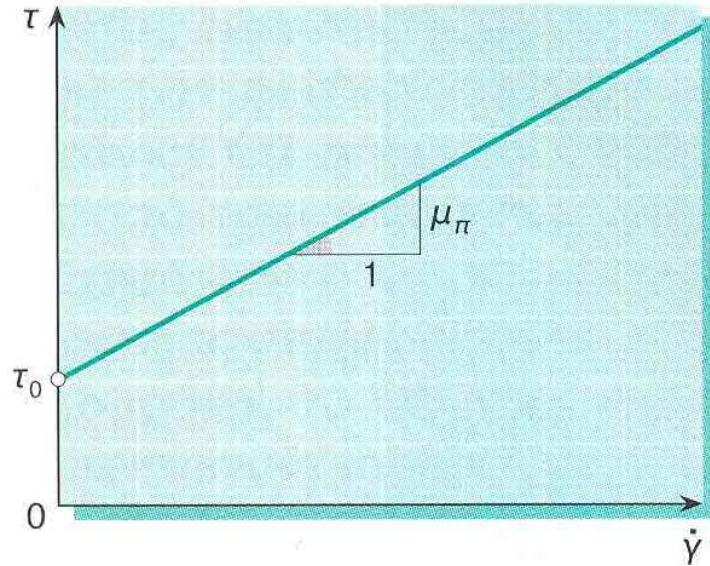
$$\tau - \tau_0 = \mu_{\pi} \dot{\gamma}, \quad \text{όταν} \quad \tau > \tau_0$$

$$\dot{\gamma} = \frac{dv_x}{dy} = 0, \quad \text{όταν} \quad \tau \leq \tau_0$$

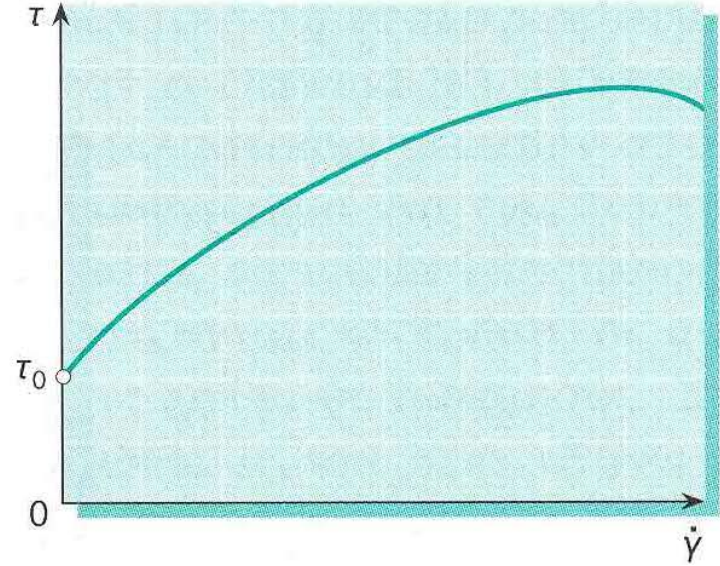
Μη νευτωνικά ρευστά

- ΜΝΡ ανεξάρτητα του χρόνου
 - ✓ Πλαστικά

$$\dot{\gamma} = f(\tau)$$



Ιδανικό πλαστικό ρευστό



Πραγματικό πλαστικό ρευστό

Μη νευτωνικά ρευστά

- ΜΝΡ ανεξάρτητα του χρόνου
 - ✓ Πλαστικά

$$\dot{\gamma} = f(\tau)$$



Ερμηνεία;

Μη νευτωνικά ρευστά

➤ ΜΝΡ ανεξάρτητα του χρόνου

- ✓ Ψευδοπλαστικά: το φαινόμενο ιξώδες μειώνεται με το ρυθμό διάτμησης
- ✓ Ποια είναι η διαφορά τους από τα πλαστικά;

$$\dot{\gamma} = f(\tau)$$

Νόμος των Oswald-de Waele:

$$\tau = \kappa \dot{\gamma}^n$$

κ : δείκτης συνοχής

Τι σχέση έχει με το φαινόμενο ιξώδες;

Για ποιο κ το ρευστό γίνεται νευτώνειο;

n : δείκτης ρεολογικής συμπεριφοράς

$n=1$ για Νευτώνειο ρευστό

$0 < n < 1$

Μη νευτωνικά ρευστά

➤ ΜΝΡ ανεξάρτητα του χρόνου

- ✓ Ψευδοπλαστικά: το φαινόμενο ιξώδες μειώνεται με το ρυθμό διάτμησης
- ✓ Ποια είναι η διαφορά τους από τα πλαστικά;

$$\dot{\gamma} = f(\tau)$$

$$\tau_0 = 0$$

Νόμος των Oswald-de Waele:

$$\tau = \kappa \dot{\gamma}^n$$

κ : δείκτης συνοχής

Τι σχέση έχει με το φαινόμενο ιξώδες;

Για ποιο κ το ρευστό γίνεται νευτώνειο;

n : δείκτης ρεολογικής συμπεριφοράς

$n=1$ για Νευτώνειο ρευστό

$0 < n < 1$

Μη νευτωνικά ρευστά

- ✓ Ψευδοπλαστικά ρευστά: φαινόμενο ιξώδες

$$\tau = \kappa \dot{\gamma}^n$$

$$\mu_{\varphi} = \kappa \dot{\gamma}^{n-1}$$

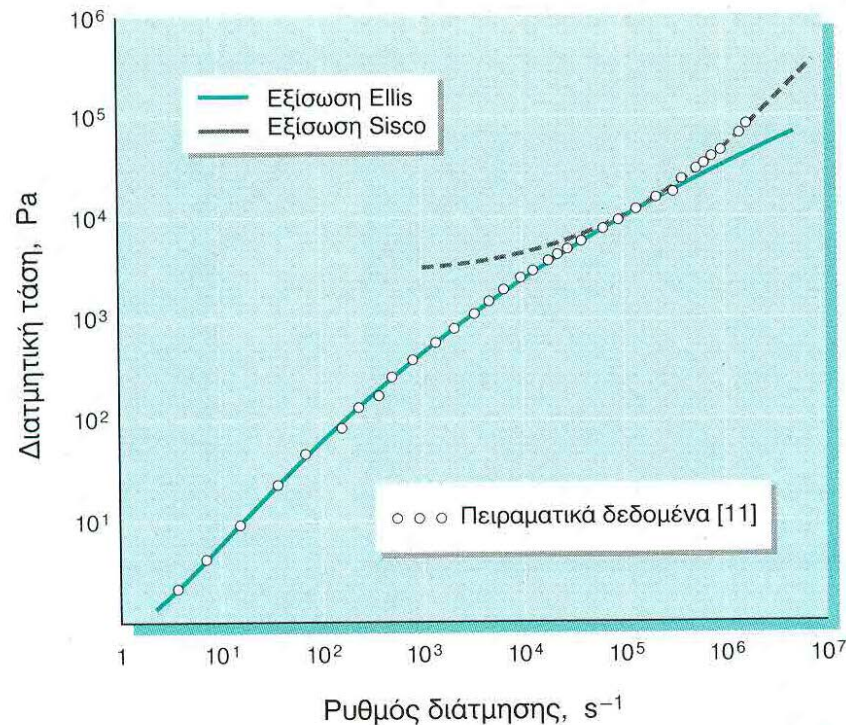
Για $0 < n < 1$ το φαινόμενο ιξώδες μειώνεται με το ρυθμό διάτμησης

Μη νευτωνικά ρευστά

✓ Ψευδοπλαστικά ρευστά: εμπειρικές εξισώσεις

Ellis $\dot{\gamma} = \left(\frac{1}{\mu_0} + k_e |\tau|^{a_e - 1} \right) \tau$

Sisco $\tau = [\mu_\infty + k_s |\dot{\gamma}|^{a_s - 1}] \dot{\gamma}$



Μη νευτωνικά ρευστά

- ΜNP ανεξάρτητα του χρόνου
 - ✓ Ψευδοπλαστικά



Μη νευτωνικά ρευστά

➤ ΜNP ανεξάρτητα του χρόνου

- ✓ Διασταλτικά: το φαινόμενο ιξώδες αυξάνεται με το ρυθμό διάτμησης
- ✓ Επίσης ισχύει:

$$\tau_0 = 0$$

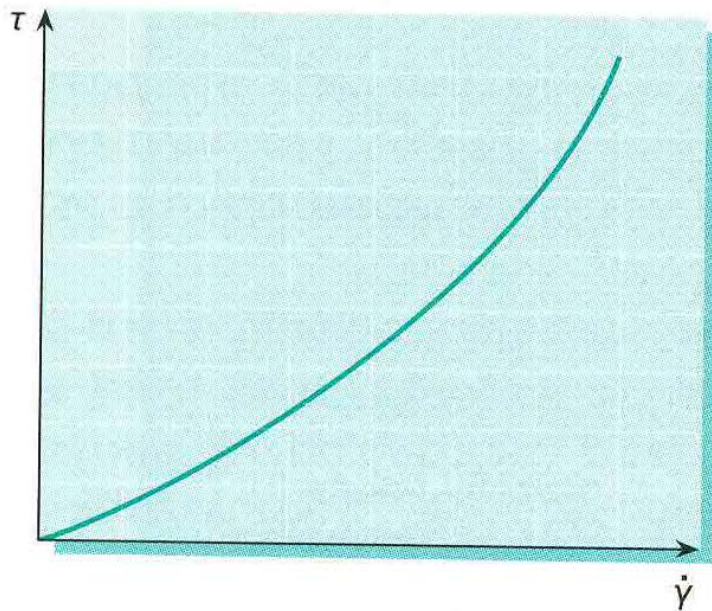
Ισχύει ο Νόμος των Oswald-de Waele: $\tau = \kappa \dot{\gamma}^n$

Για διασταλτικά $n > 1$

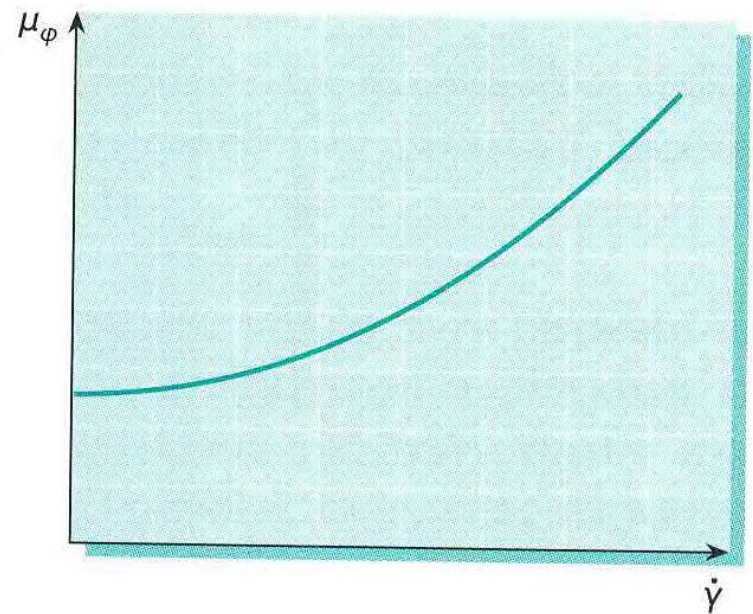
Παρατηρήθηκε από τον Reynolds σε διμερή μείγματα στερεών υγρών

Μη νευτωνικά ρευστά

- ✓ Διασταλτικά: το φαινόμενο ιξώδες αυξάνεται με το ρυθμό διάτμησης



(α)



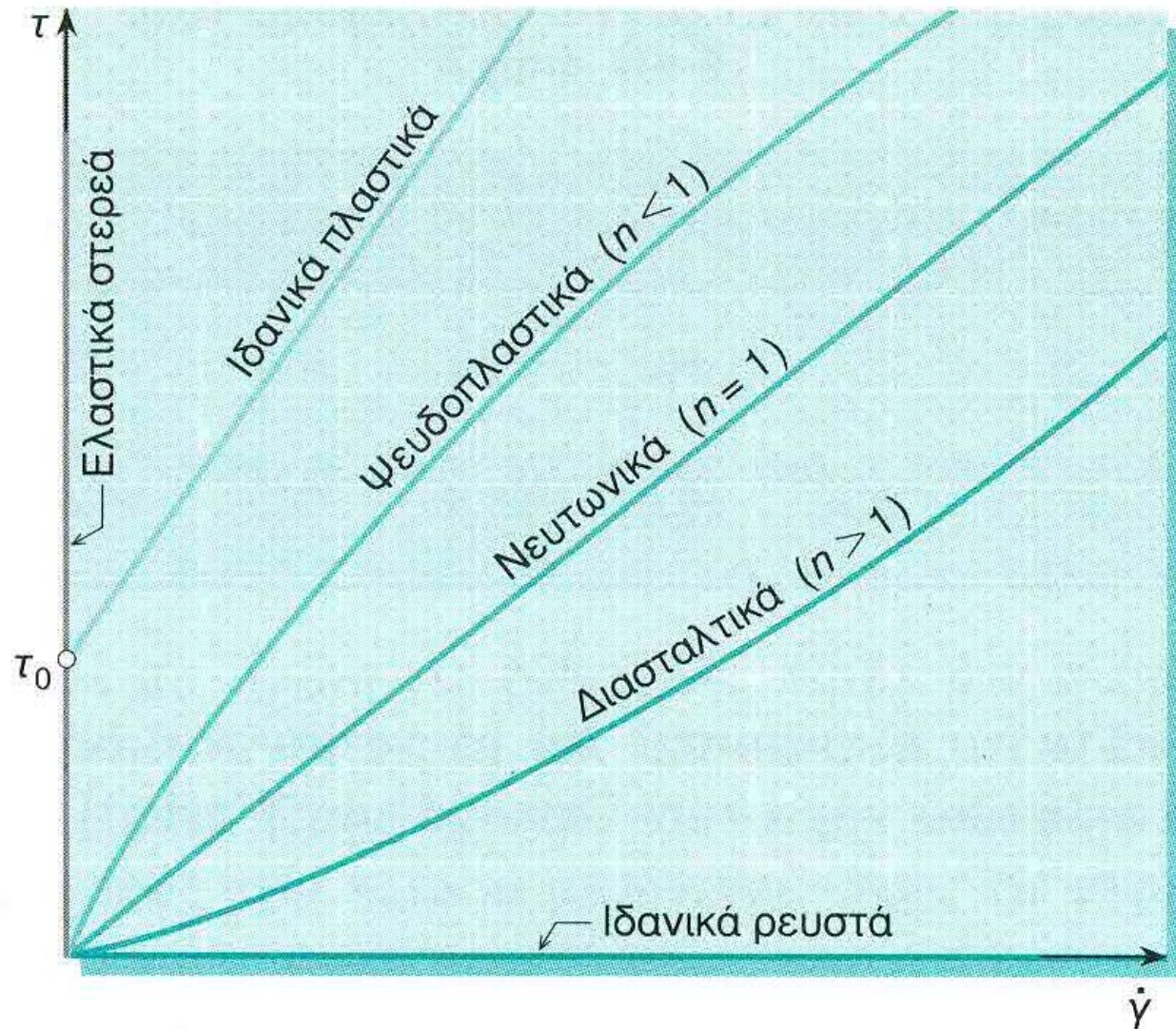
(β)

Μη νευτωνικά ρευστά

- ✓ Διασταλτικά: το φαινόμενο ιξώδες αυξάνεται με το ρυθμό διάτμησης



Μη νευτωνικά ρευστά



Μη νευτωνικά ρευστά

- **MNP εξαρτώμενα από το χρόνο**
 - Η διατμητική τάση εξαρτάται από τον τοπικό ρυθμό διάτμησης αλλά και από την διάρκεια της διάτμησης
- ✓ Θιξοτροπικά
- ✓ Ρεοπηκτικά

$$\tau = f(\dot{\gamma}, t)$$

Μη νευτωνικά ρευστά

➤ ΜΝΡ εξαρτώμενα από το χρόνο

- ✓ Θιξοτροπικά: Το ιξώδες τους μειώνεται με την πάροδο του χρόνου όταν υφίστανται διάτμηση
- ✓ Ρεοπηκτικά: Το ιξώδες τους αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου όταν υφίστανται διάτμηση

$$\tau = f(\dot{\gamma}, t)$$

Μη νευτωνικά ρευστά

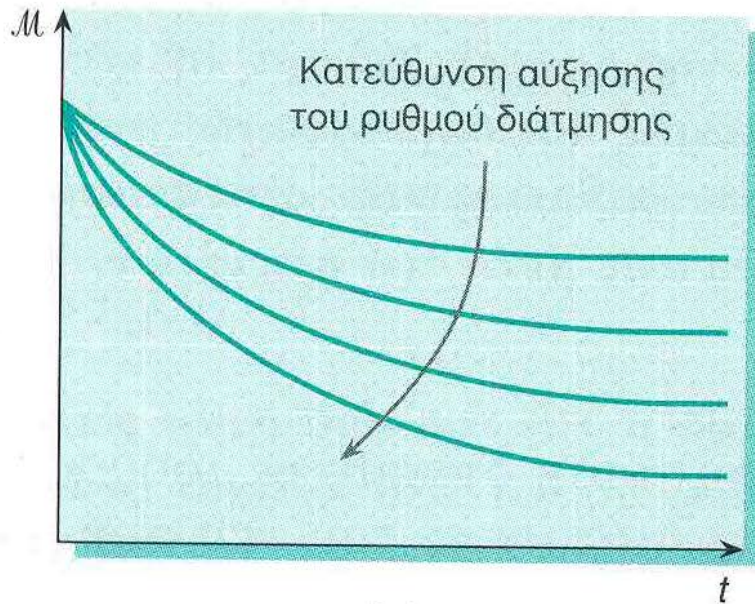
- ✓ Θιξοτροπικά: Το ιξώδες τους μειώνεται με την πάροδο του χρόνου όταν υφίστανται διάτμηση



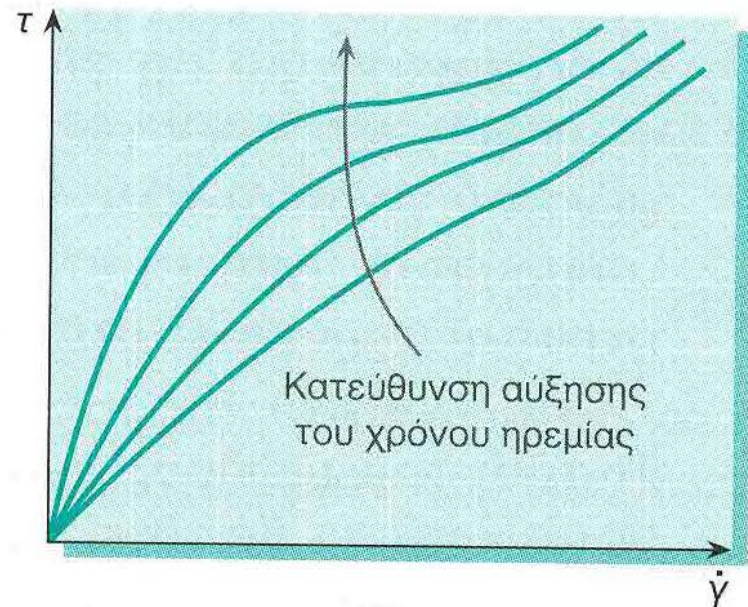
Ερμηνεία;

Μη νευτωνικά ρευστά

- ✓ Θιξοτροπικά: Το ιξώδες τους μειώνεται με την πάροδο του χρόνου όταν υφίστανται διάτμηση



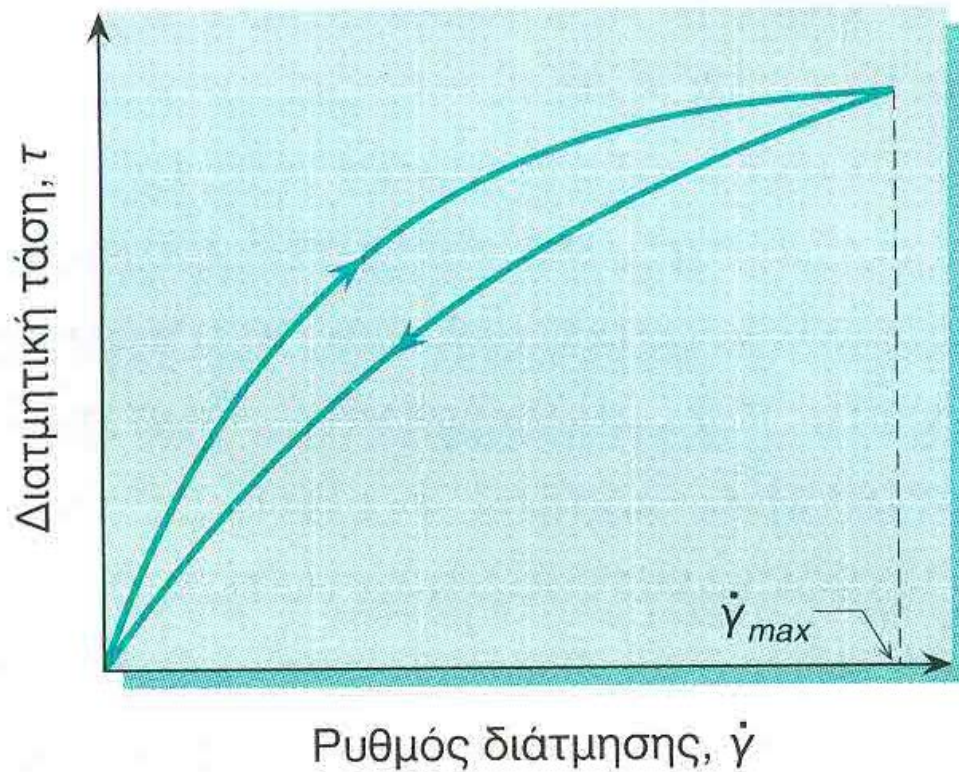
(α)



(β)

Μη νευτωνικά ρευστά

- ✓ Θιξοτροπικά: Βρόγχος υστέρησης



Μη νευτωνικά ρευστά

- ✓ Ρεοπηκτικά: Το ιξώδες τους αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου όταν υφίστανται διάτμηση

$$\tau = f(\dot{\gamma}, t)$$

- ✓ Αραιά διαλύματα VO_5
- ✓ Πυκνά διαλύματα ένυδρου γύψου
- ✓ Μπεντονίτης
- ✓ Η ρεοπηξία είναι αντιστρεπτό φαινόμενο

Ιξωδοελαστικά ρευστά

- ✓ Είναι ταυτόχρονα στερεά και ρευστά
- ✓ Ασπράδι αυγού
- ✓ Πίσσα
- ✓ Τήγματα πλαστικών
- ✓ Υγρός στόκος



Ιξωδοελαστικά ρευστά

✓ Φαινόμενο Weissenberg

From Wikipedia, the free encyclopedia

The **Weissenberg effect** is a phenomenon that occurs when a spinning rod is inserted into a [solution](#) of [liquid polymer](#). Instead of being thrown outward, the solution is drawn towards the rod and rises up around it. The effect is named after [Karl Weissenberg](#).



The Weissenberg Effect.mp4

Ιξωδοελαστικά ρευστά

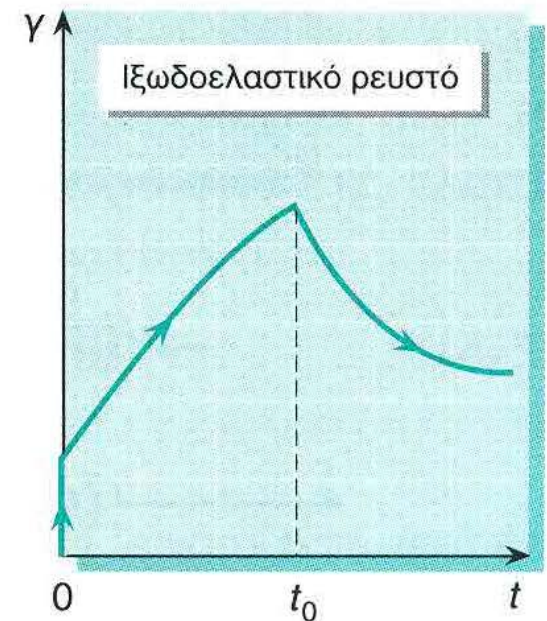
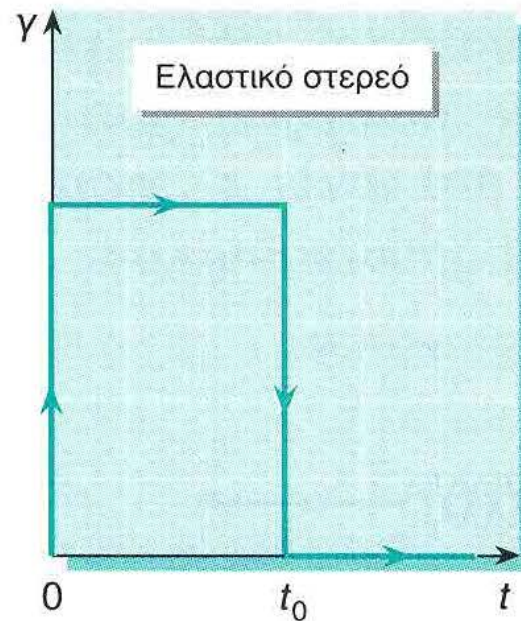
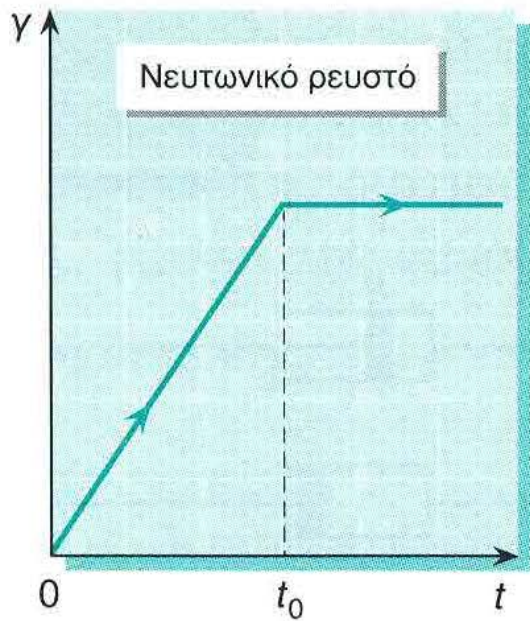


(α)



(β)

Ιξωδοελαστικά ρευστά

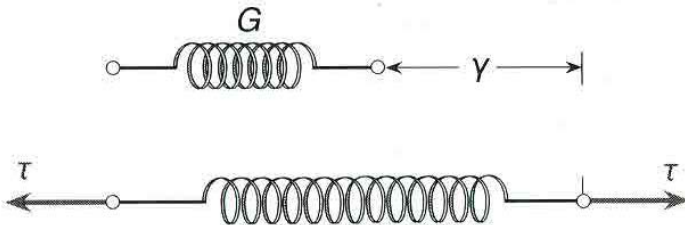
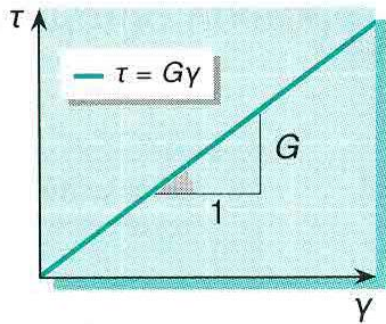


Ιξωδοελαστικά ρευστά

Μηχανικά μοντέλα

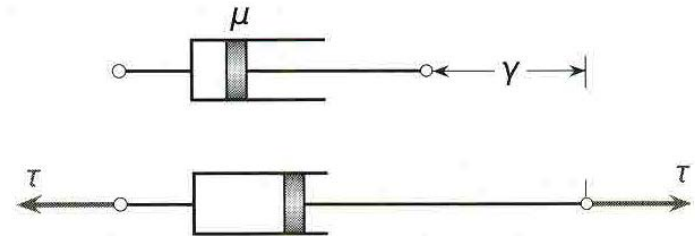
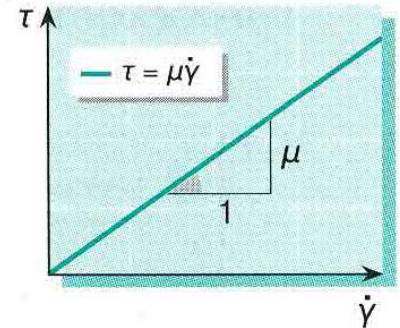
$$\tau = G\gamma$$

Μέτρο διάτμησης



Ελατήριο

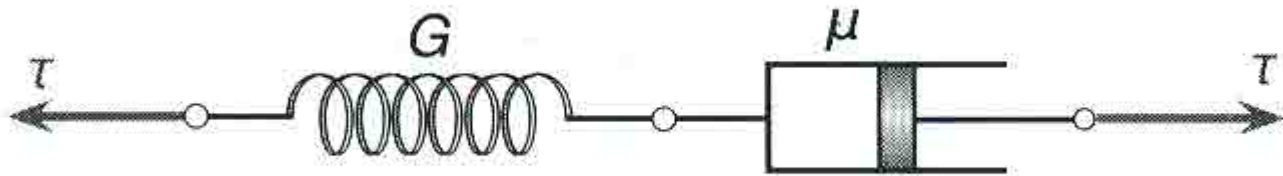
$$\tau = \mu \dot{\gamma}$$



Ιξωδομειωτής

Ιξωδοελαστικά ρευστά

Maxwell



$$\gamma = \gamma_{\varepsilon} + \gamma_{\iota}$$

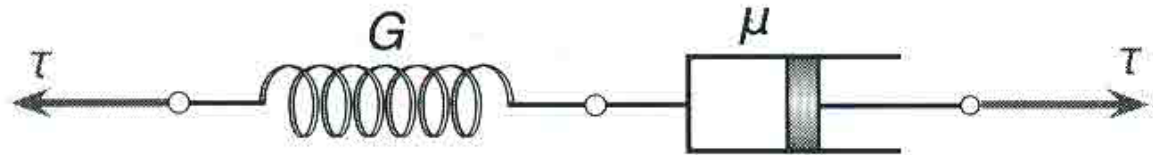
$$\tau = G\gamma_{\varepsilon} = \mu\dot{\gamma}_{\iota}$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{\varepsilon} + \dot{\gamma}_{\iota}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\mu} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\mu}$$

Ιξωδοελαστικά ρευστά

Ορίζουμε τη
σταθερά
χαλάρωσης λ



$$\dot{\gamma} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\mu} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\mu}$$

$$\tau + \lambda_1 \dot{\tau} = \mu \dot{\gamma}$$

$$\lambda_1 = \frac{\mu}{G}$$

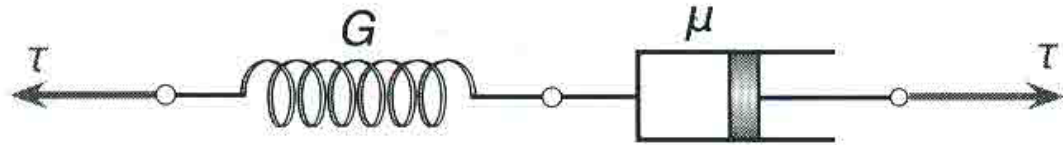
Ολοκληρώνω για
σταθερή ολική
παραμόρφωση,
δηλαδή για $\dot{\gamma} = 0$

$$\tau = \tau_0 e^{-t/\lambda_1}$$

Όπου τ_0 η αρχική τιμή της τάσης

Ιξωδοελαστικά ρευστά

Maxwell



Ορίζοντας τον τελεστή

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tau + \lambda_1 \dot{\tau} = \mu \dot{\gamma}$$

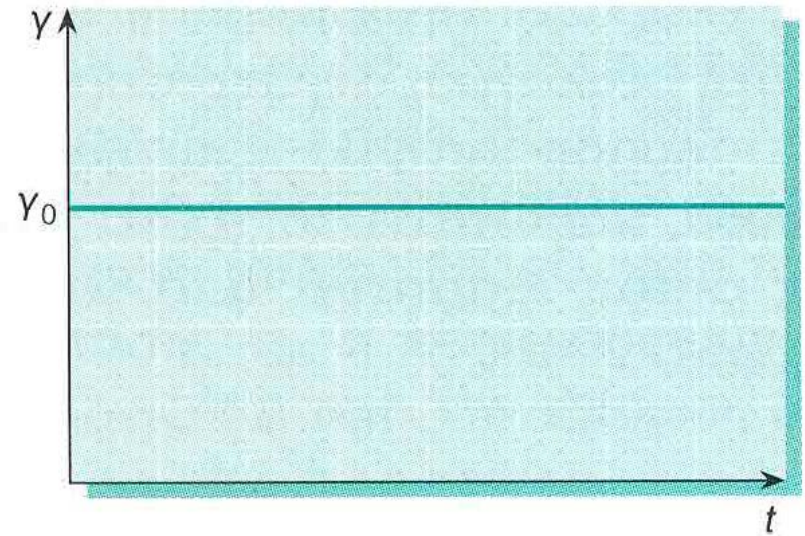
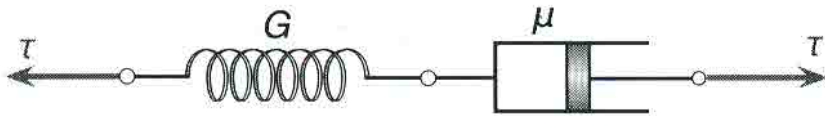
$$\{1 + \lambda_1 \partial_t\} \tau = \{\mu \partial_t\} \gamma$$

ή

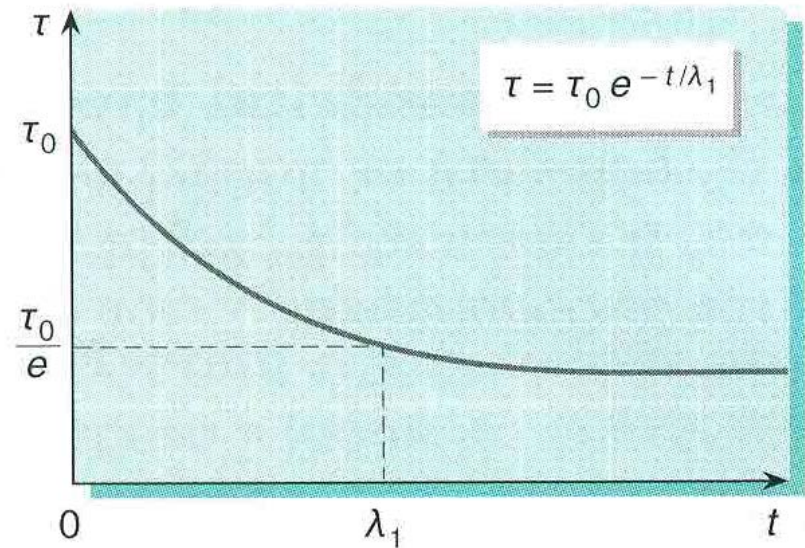
$$\left\{ \frac{1}{\mu} + \frac{\partial_t}{G} \right\} \tau = \{\partial_t\} \gamma$$

Ιξωδοελαστικά ρευστά

Maxwell

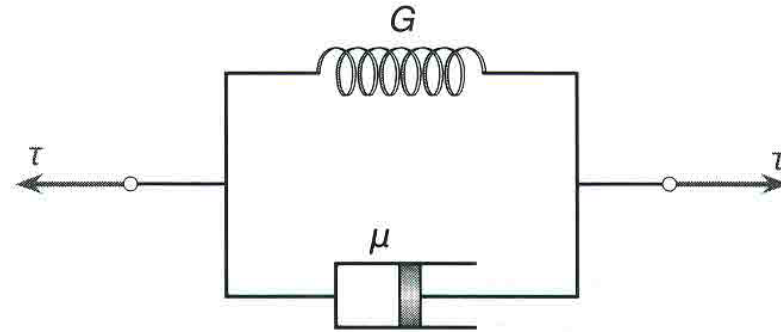


$$\tau = \tau_0 e^{-t/\lambda_1}$$



Ιξωδοελαστικά ρευστά

Kelvin



$$\gamma = \gamma_\varepsilon = \gamma_l$$

$$\tau_\varepsilon = G\gamma_\varepsilon = G\gamma$$

$$\tau_l = \mu\dot{\gamma}_l = \mu\dot{\gamma}$$

$$\tau = \tau_\varepsilon + \tau_l$$

$$\tau = G\gamma + \mu\dot{\gamma}$$

$$\tau = \{ G + \mu\partial_t \} \gamma$$

ή

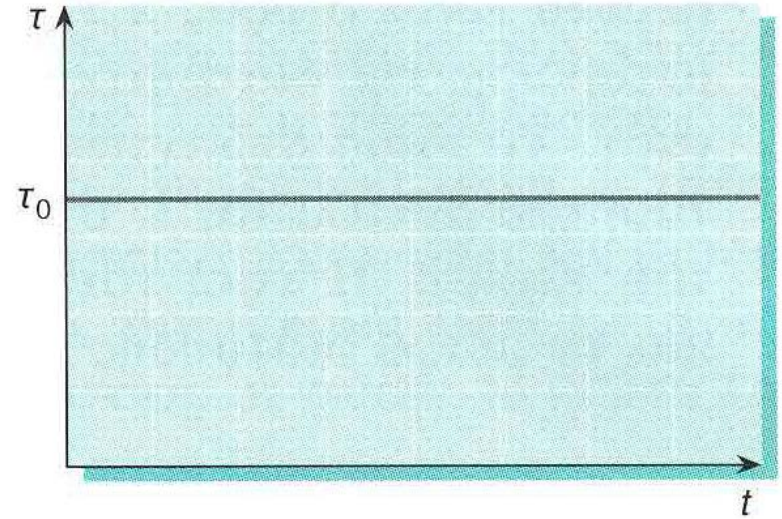
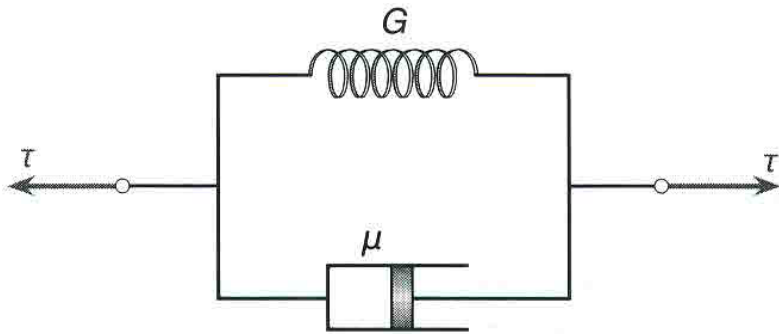
$$\gamma = (1 - e^{-t/\lambda_2}) \frac{\tau_0}{G}$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu}{G}$$

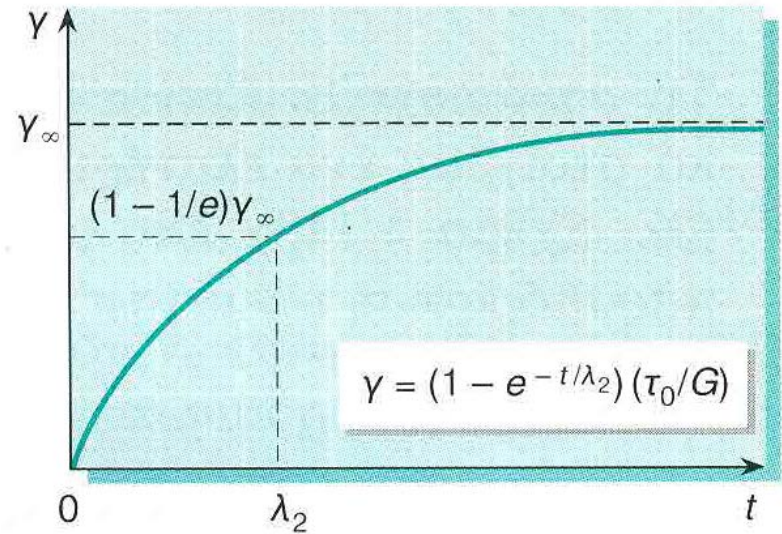
Όπου λ_2 ο χρόνος υστέρησης:

Ιξωδοελαστικά ρευστά

Kelvin

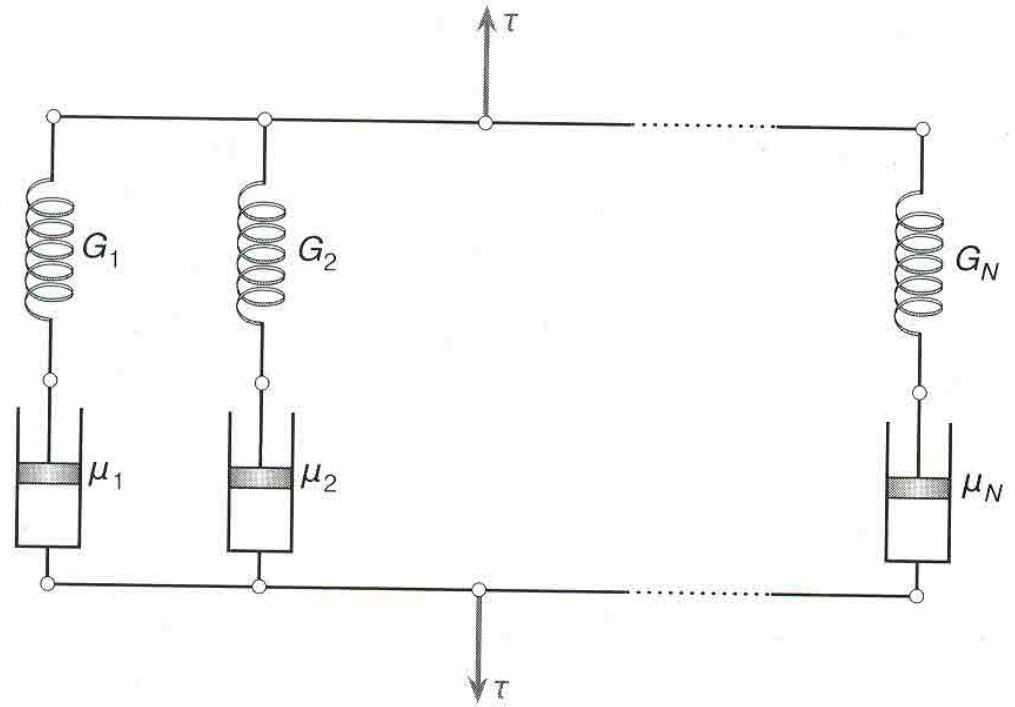


$$\gamma = (1 - e^{-t/\lambda_2}) \frac{\tau_0}{G}$$



Ιξωδοελαστικά ρευστά

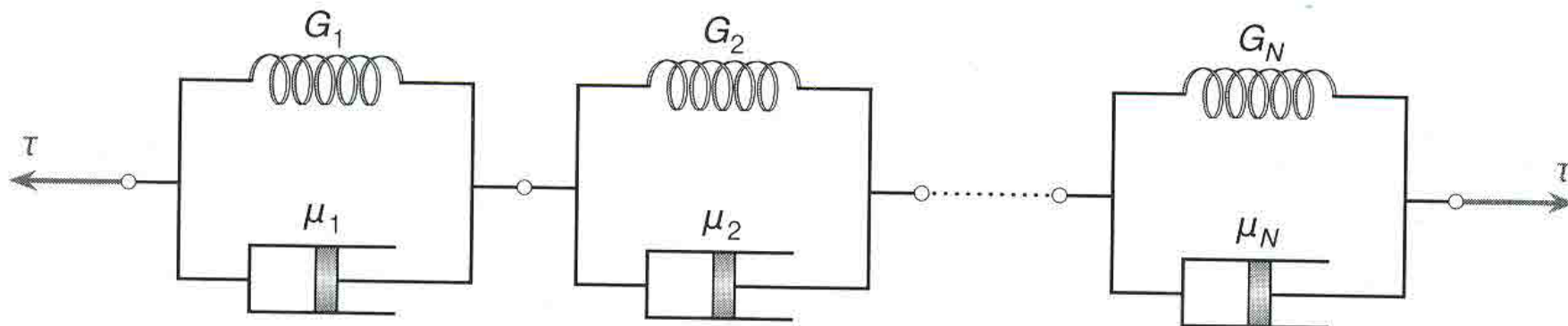
Γενικευμένα μοντέλα Maxwell



$$\tau = \frac{\dot{\gamma}}{\left\{ \frac{1}{\mu_1} + \frac{\partial_t}{G_1} \right\}} + \frac{\dot{\gamma}}{\left\{ \frac{1}{\mu_2} + \frac{\partial_t}{G_2} \right\}} + \dots + \frac{\dot{\gamma}}{\left\{ \frac{1}{\mu_N} + \frac{\partial_t}{G_N} \right\}}$$

Ιξωδοελαστικά ρευστά

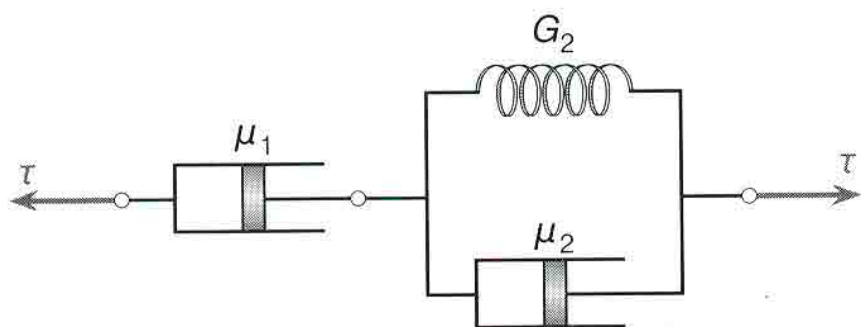
Γενικευμένα μοντέλα Kelvin



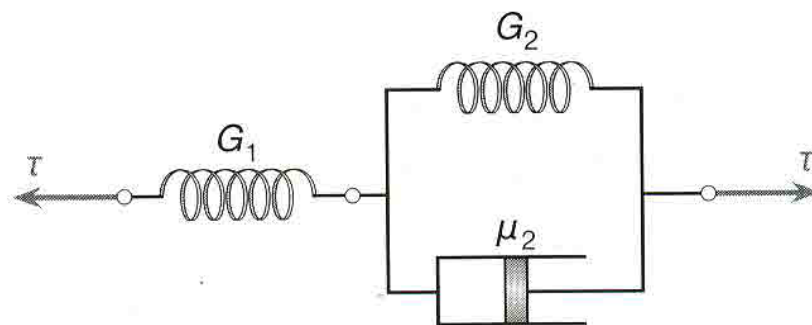
$$\gamma = \frac{\tau}{\{G_1 + \mu_1 \partial_t\}} + \frac{\tau}{\{G_2 + \mu_2 \partial_t\}} + \dots + \frac{\tau}{\{G_N + \mu_N \partial_t\}}$$

Ιξωδοελαστικά ρευστά

Σύνθετα μοντέλα

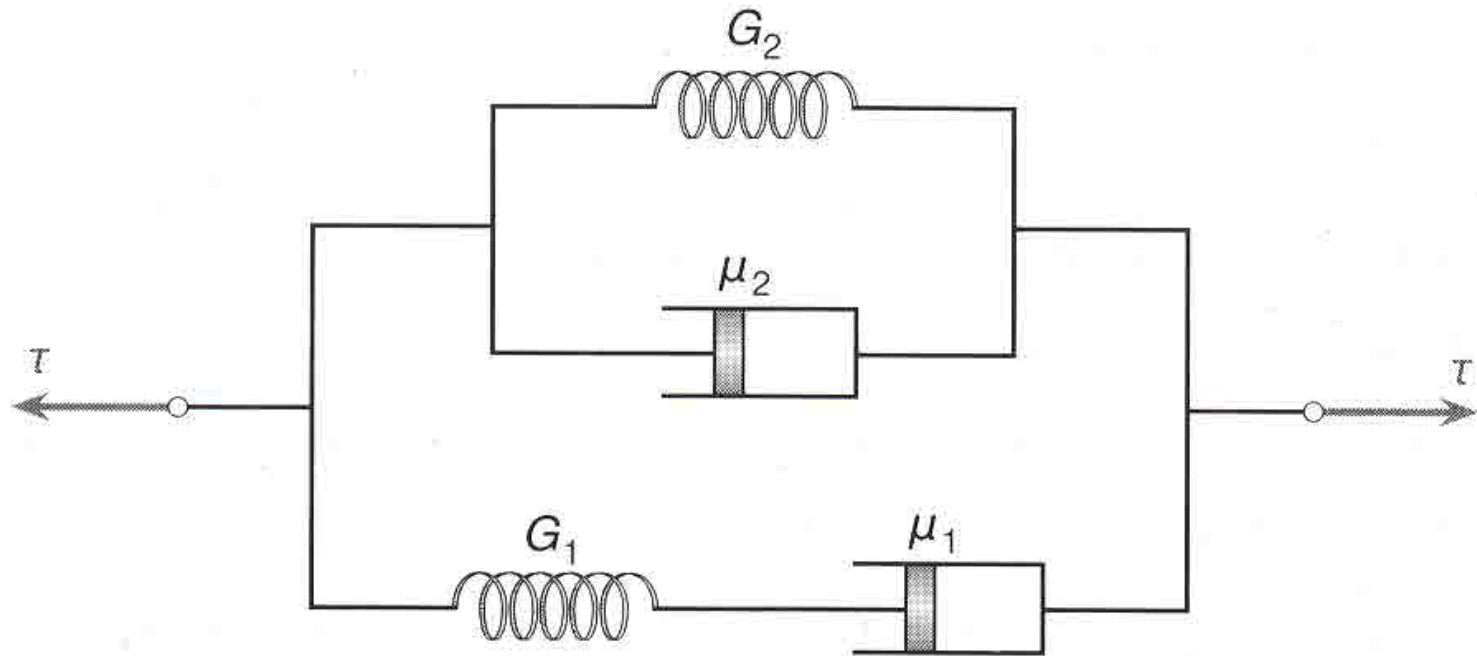


Ιξωδοελαστικό ρευστό



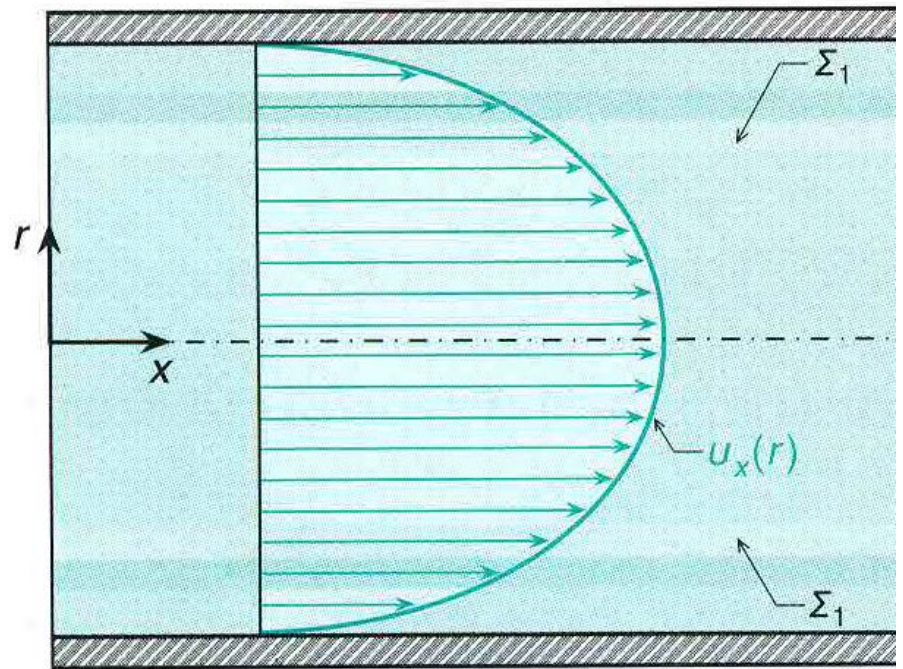
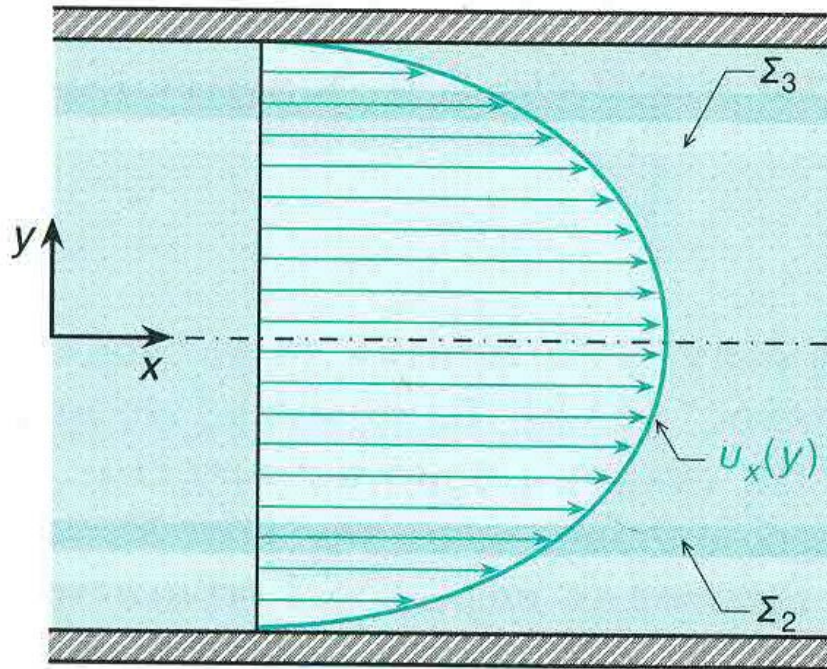
Ιξωδοελαστικό στερεό

Το πρόβλημα: Η ρεολογική συμπεριφορά ενός ιξωδοελαστικού υλικού περιγράφεται από το μηχανικό μοντέλο που εικονίζεται στο Σχήμα Π4-7. Ποιά είναι η υλική σχέση του υλικού αυτού;

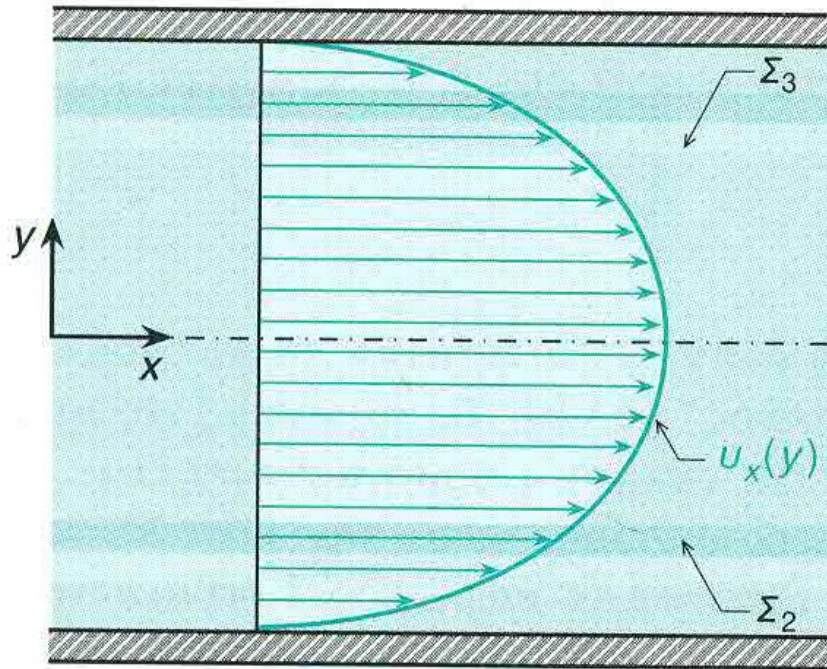


Το πρόβλημα: Κατά τη στρωτή ροή ενός ασυμπίεστου νευτωνικού ρευστού (1) μεταξύ δύο ακίνητων παράλληλων πλακών και (2) σε αγωγό κυκλικής διατομής, η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού είναι παραβολική. Να σχεδιαστούν:

- α. Η κατανομή των διατμητικών τάσεων σε μια εγκάρσια διατομή του ρεύματος.
β. Οι δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας τις οποίες ασκεί το κινούμενο ρευστό πάνω στις επιφάνειες των στερεών με τα οποία έρχεται σε επαφή.



- Το πρόβλημα:** Κατά τη στρωτή ροή ενός ασυμπίεστου νευτωνικού ρευστού (1) μεταξύ δύο ακίνητων παράλληλων πλακών και (2) σε αγωγό κυκλικής διατομής, η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού είναι παραβολική. Να σχεδιαστούν:
- α. Η κατανομή των διατμητικών τάσεων σε μια εγκάρσια διατομή του ρεύματος.
 - β. Οι δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας τις οποίες ασκεί το κινούμενο ρευστό πάνω στις επιφάνειες των στερεών με τα οποία έρχεται σε επαφή.

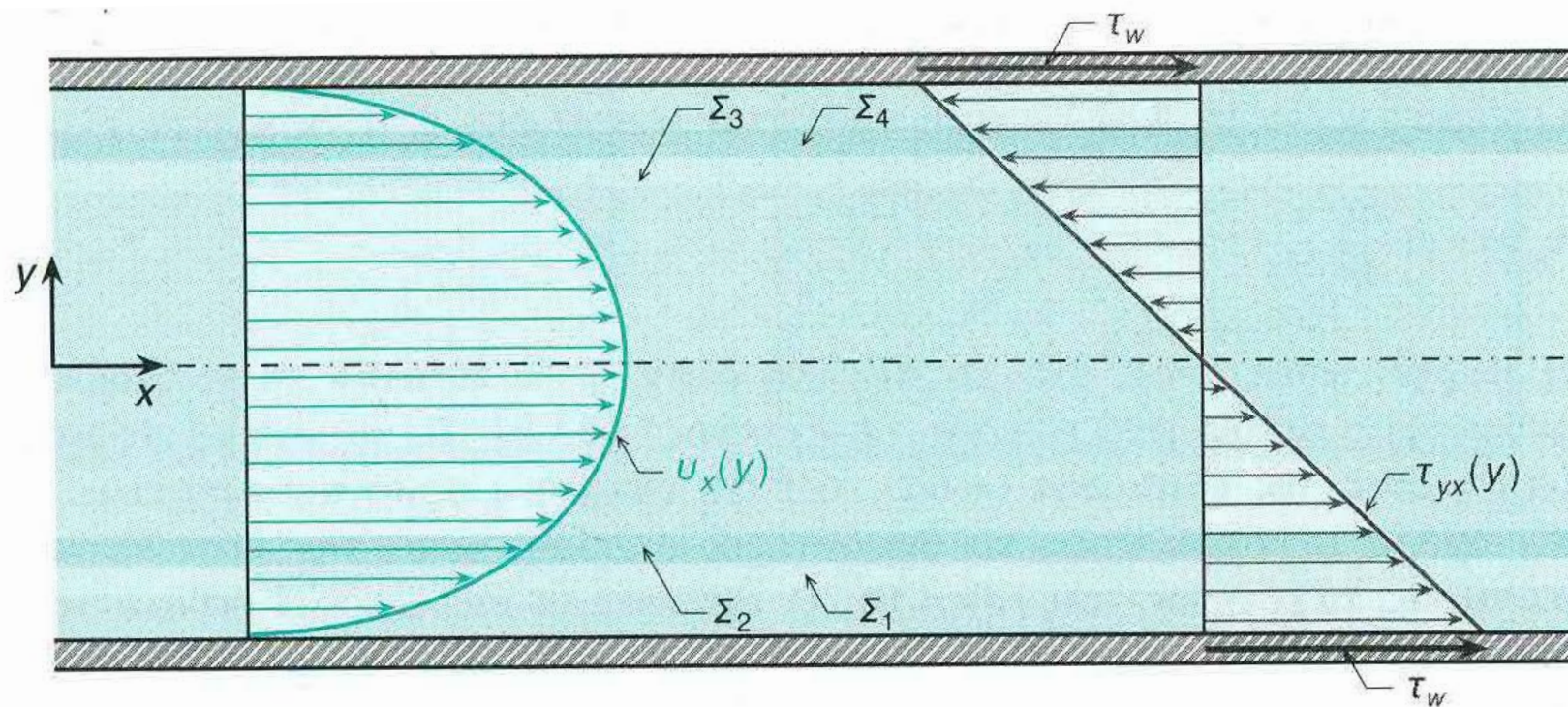


$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

Το πρόβλημα: Κατά τη στρωτή ροή ενός ασυμπίεστου νευτωνικού ρευστού (1) μεταξύ δύο ακίνητων παράλληλων πλακών και (2) σε αγωγό κυκλικής διατομής, η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού είναι παραβολική. Να σχεδιαστούν:

α. Η κατανομή των διατμητικών τάσεων σε μια εγκάρσια διατομή του ρεύματος.

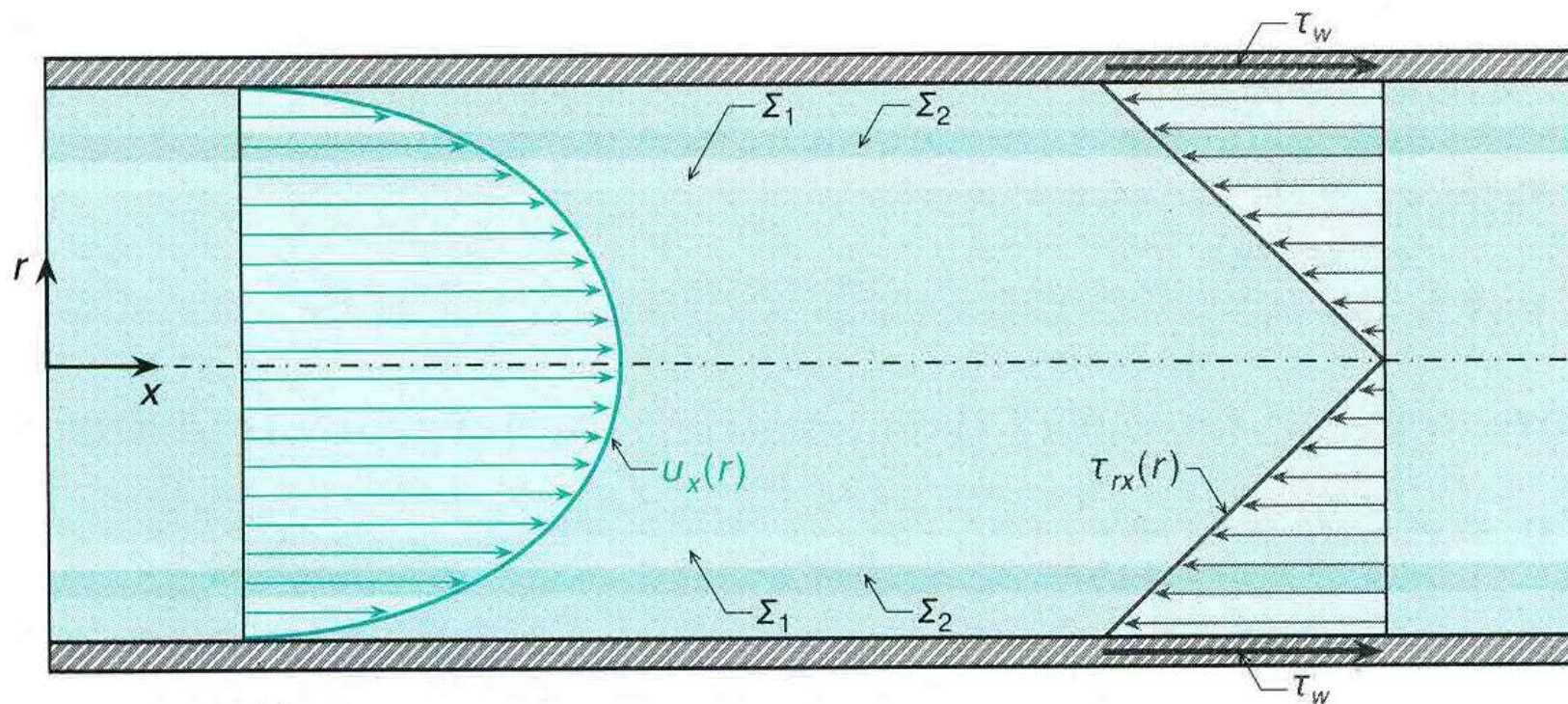
β. Οι δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας τις οποίες ασκεί το κινούμενο ρευστό πάνω στις επιφάνειες των στερεών με τα οποία έρχεται σε επαφή.



Το πρόβλημα: Κατά τη στρωτή ροή ενός ασυμπίεστου νευτωνικού ρευστού (1) μεταξύ δύο ακίνητων παράλληλων πλακών και (2) σε αγωγό κυκλικής διατομής, η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού είναι παραβολική. Να σχεδιαστούν:

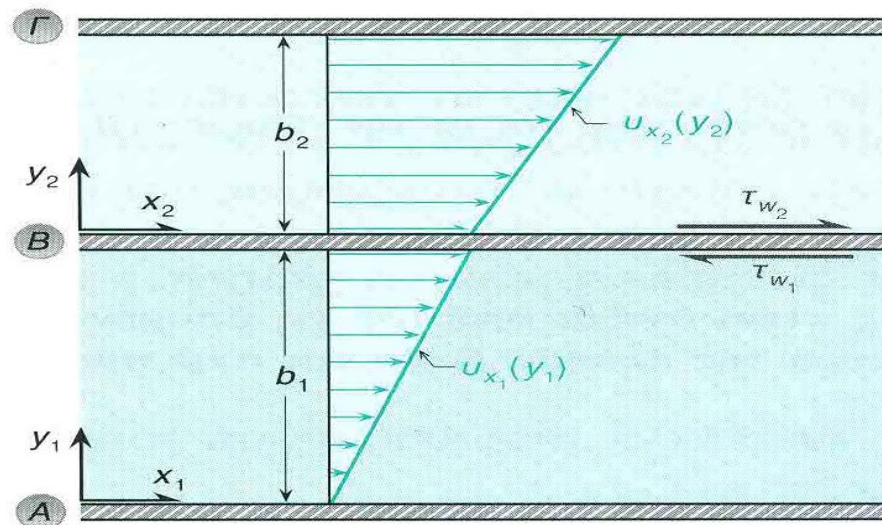
α. Η κατανομή των διατμητικών τάσεων σε μια εγκάρσια διατομή του ρεύματος.

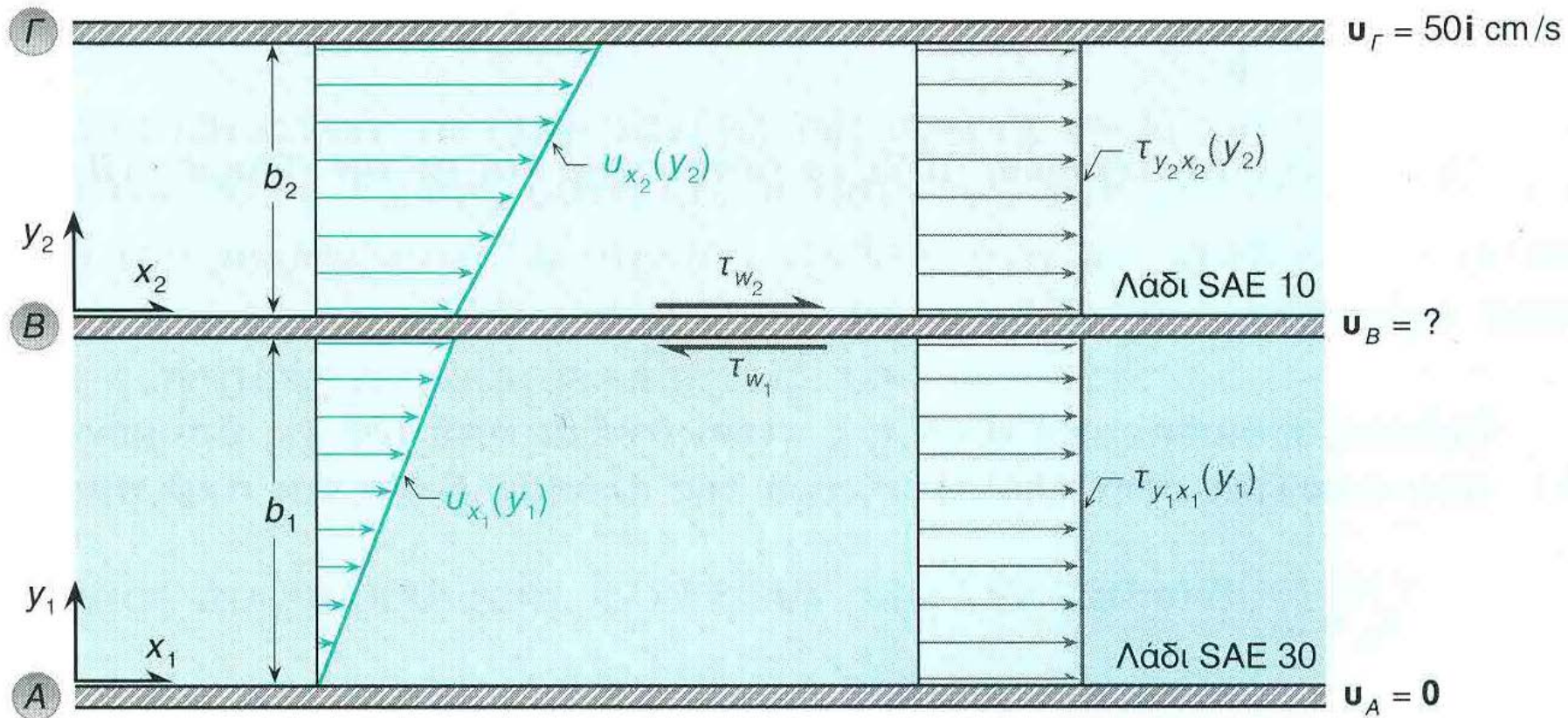
β. Οι δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας τις οποίες ασκεί το κινούμενο ρευστό πάνω στις επιφάνειες των στερεών με τα οποία έρχεται σε επαφή.



Το πρόβλημα: Στο Σχήμα Π4-2 εικονίζεται μια διάταξη τριών ίσων, παράλληλων πλακών, A , B και Γ . Στο χώρο μεταξύ των πλακών A και B , πάχους $b_1 = 6 \text{ mm}$, περιέχεται λάδι SAE 30 και σε εκείνον μεταξύ των πλακών B και Γ , πάχους $b_2 = 4 \text{ mm}$, λάδι SAE 10. Τα δύο λάδια έχουν θερμοκρασία 20°C και η υλική σχέση τους είναι γραμμική. Η πλάκα Γ κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα $u_f = 50 \text{ cm/s}$, ενώ η πλάκα A παραμένει ακίνητη. Η πλάκα B μπορεί να κινηθεί ελεύθερα υπό την επίδραση των ιξωδών δυνάμεων που ενεργούν πάνω σε αυτήν. Οι ταχύτητες u_{x_1} του λαδιού SAE 30 και u_{x_2} του λαδιού SAE 10 είναι γραμμικές συναρτήσεις των αποστάσεων y_1 (από την πλάκα A) και y_2 (από την πλάκα B), αντίστοιχα. Η ροή των δύο ρευστών είναι μόνιμη και στρωτή. Ζητούνται:

α. Οι αναλυτικές εκφράσεις των συναρτήσεων $u_{x_1}(y_1)$ και $u_{x_2}(y_2)$.





$$v_{x_1} = \alpha_1 + \beta_1 y_1$$

$$v_{x_2} = \alpha_2 + \beta_2 y_2$$

$$v_{x_1} \Big|_{y_1=0} = 0$$

$$v_{x_1} \Big|_{y_1=b_1} = v_B$$

$$v_{x_2} \Big|_{y_2=0} = v_B$$

$$v_{x_2} \Big|_{y_2=b_2} = v_\Gamma$$

$$0 = \alpha_1 + \beta_1(0)$$

$$v_B = \alpha_1 + \beta_1(b_1)$$

$$v_B = \alpha_2 + \beta_2(0)$$

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{and} \quad \beta_1 = \frac{v_B}{b_1}$$

$$v_{x_1} = \left(\frac{v_B}{b_1} \right) y_1$$

$$0 = \alpha_1 + \beta_1(0)$$

$$v_B = \alpha_1 + \beta_1(b_1)$$

$$v_B = \alpha_2 + \beta_2(0)$$

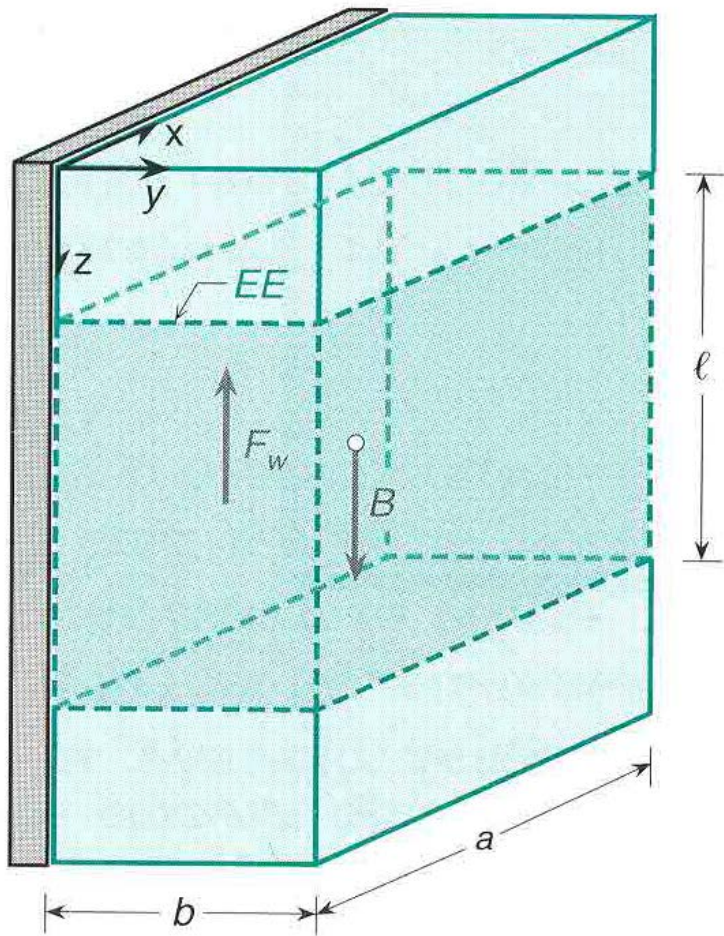
$$\alpha_1 = 0 \quad \text{and} \quad \beta_1 = \frac{v_B}{b_1}$$

$$v_{x_1} = \left(\frac{v_B}{b_1} \right) y_1$$

$$\alpha_2 = v_B \quad \text{and} \quad \beta_2 = \frac{v_\Gamma - v_B}{b_2}$$

$$v_{x_2} = v_B + \left(\frac{v_\Gamma - v_B}{b_2} \right) y_2$$

αν το ελάχιστο πάχος του στρώματός του πάνω στον τοίχο είναι $b = 0,5 \text{ mm}$.



Πότε είναι ελάχιστο το πάχος;

$$\tau_{yz}|_{y=0} = \tau_0 \P$$

$$F_w = B \eta$$

$$(\tau_{yz}|_{y=0})(a) = \rho g a b l \eta$$

9

$$\Delta \rho \alpha \cdot \tau_0 = \rho g b \eta$$

$$\tau_0 = 1530 \cdot 9.81 \cdot 0.5 \times 10^{-3} = 7.5 \text{ Pa}$$

Σκοπός: Ο καθορισμός του είδους μη νευτωνικού ρευστού από πειραματικά δεδομένα διατμητικής τάσης – ρυθμού διάτμησης.

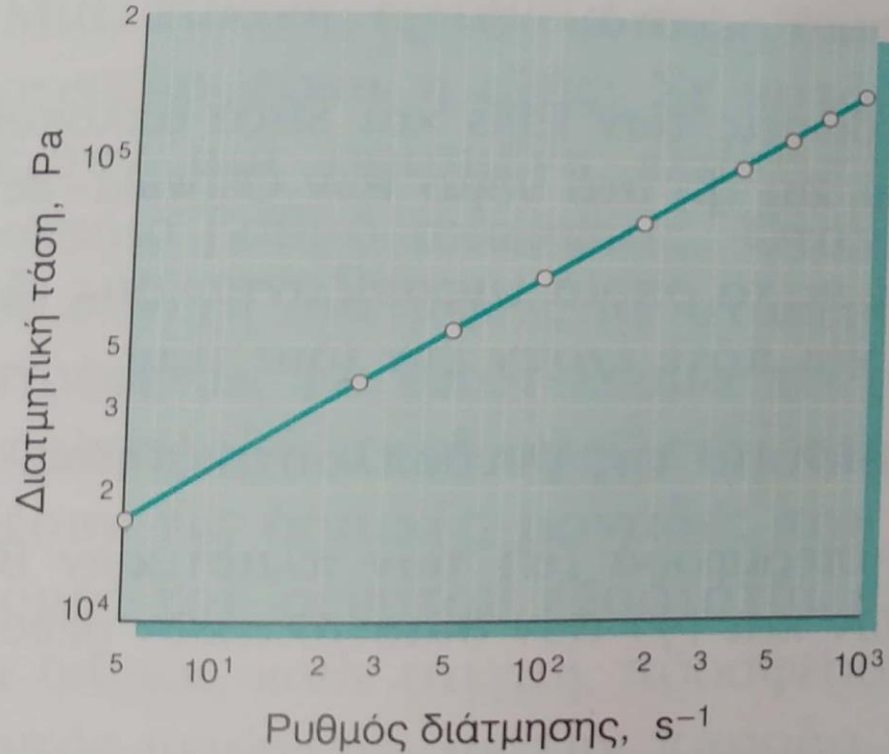
Το πρόβλημα: Στον πίνακα Π4-6 δίνονται ορισμένα πειραματικά αποτελέσματα από τη διάτμηση του τήγματος ενός πολυμερούς σε ένα περιστροφικό ιξωδόμετρο Couette. Τα αποτελέσματα αυτά έχουν ληφθεί σε συνθήκες σταθερής θερμοκρασίας και πίεσης. Ζητούνται:

- α. Να εξεταστεί αν το δεδομένο πολυμερές αυτό υπακούει στον εκθετικό νόμο των Ostwald–de Waele. Αν ναι, να καθοριστούν οι τιμές του δείκτη συνοχής και του δείκτη ρεολογικής συμπεριφοράς του.
- β. Να παρασταθεί γραφικά η εξάρτηση του φαινόμενου ιξώδους του τήγματος του πολυμερούς από το ρυθμό διάτμησης του.

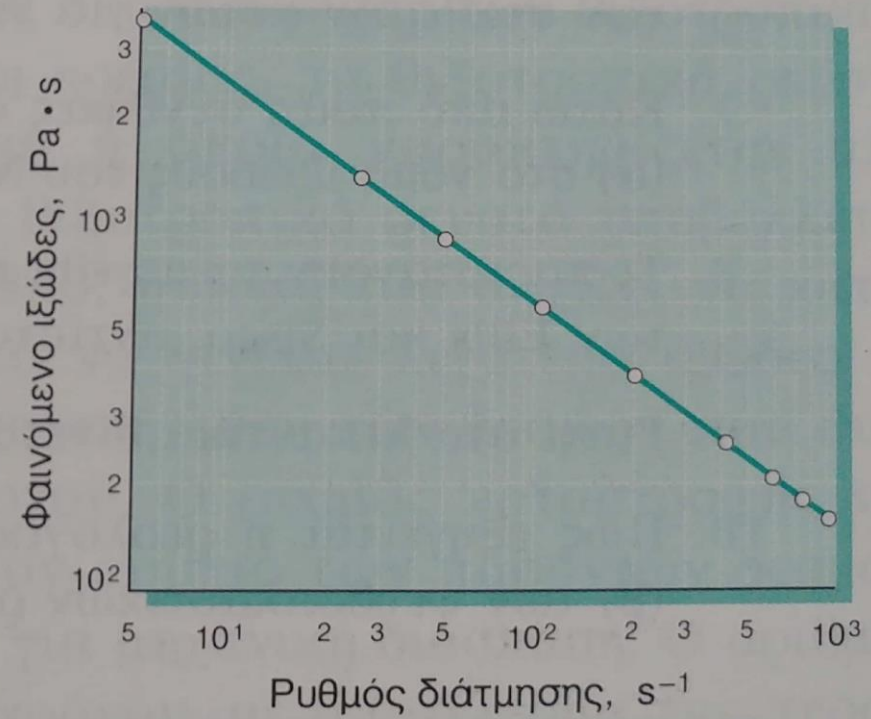
Πίνακας Π4-6 Πειραματικά δεδομένα διάτμησης για το τήγμα του πολυμερούς

$\dot{\gamma} \text{ (s}^{-1}\text{)}$	5	25	50	100	200	400	600	800	1000
$\tau \text{ (kPa)}$	17,7	32,8	42,8	55,9	73,0	95,4	112	125	136

$$\tau = \kappa \dot{\gamma}^n$$



(α)



(β)

$$y = a + bx \quad y = \ln(\tau) \quad x = \ln(\dot{\gamma})$$

$$a = \ln(\kappa) = 9.1959 \Rightarrow \kappa = 9857 \text{ Pa sec}^n$$

$$b = n = 0.3805$$

$$\mu_{\phi} = \kappa \dot{\gamma}^{n-1} \Rightarrow \mu_{\phi} = 9857 \dot{\gamma}^{-0.6195}$$

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων