

$$\begin{aligned}
 1. \quad & 3x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 12 \\
 & x_1 + 2x_2 - 24x_3 + 6x_4 = 15 \\
 & 5x_1 - 2x_2 - 13x_3 + x_4 = -3 \\
 & -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 7
 \end{aligned}$$

Το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων μπορεί να γραφεί και ως:

3	3	0	5	12	αύξηση	5	-2	-13	1	-3	$a_{21} = a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{11} = 0$
1	2	-24	6	15		1	2	-24	6	15	$a_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{12} = \frac{6}{5}$
5	-2	-13	1	-3		3	3	0	5	12	$a_{23} = a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{13} = -\frac{107}{5}$
-4	6	4	-2	7		-4	6	4	-2	7	$a_{24} = a_{24} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{14} = \frac{29}{5}$
										$b_2 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot b_1 = \frac{78}{5}$	

5	-2	-13	1	-3	$a_{31} = a_{31} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{11} = 0$	5	-2	-13	1	-3	αύξηση	
0	<del>12</del>	<del>-107</del>	<del>29</del>	<del>78</del>	$a_{32} = a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{12} = \frac{21}{5}$	0	<del>12</del>	<del>-107</del>	<del>29</del>	<del>78</del>		32
3	3	0	5	12	$a_{33} = a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{13} = \frac{39}{5}$	0	<del>21</del>	<del>39</del>	<del>22</del>	<del>69</del>		52
-4	6	4	-2	7	$a_{34} = a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{14} = \frac{22}{5}$	-4	6	4	-2	7		
					$b_3 = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot b_1 = \frac{69}{5}$							

$a_{41} = a_{41} - \frac{a_{41}}{a_{11}} \cdot a_{11} = 0$	5	-2	-13	1	-3	αύξηση	5	-2	-13	1	-3
$a_{42} = a_{42} - \frac{a_{41}}{a_{11}} \cdot a_{12} = \frac{22}{5}$	0	<del>12</del>	<del>-107</del>	<del>29</del>	<del>78</del>		0	<del>22</del>	<del>-32</del>	<del>-6</del>	<del>23</del>
$a_{43} = a_{43} - \frac{a_{41}}{a_{11}} \cdot a_{13} = \frac{-32}{5}$	0	<del>21</del>	<del>39</del>	<del>22</del>	<del>69</del>		0	<del>21</del>	<del>39</del>	<del>22</del>	<del>69</del>
$a_{44} = a_{44} - \frac{a_{41}}{a_{11}} \cdot a_{14} = \frac{-6}{5}$	0	<del>22</del>	<del>-32</del>	<del>-6</del>	<del>23</del>		0	<del>12</del>	<del>-107</del>	<del>29</del>	<del>78</del>
$b_4 = b_4 - \frac{a_{41}}{a_{11}} \cdot b_1 = \frac{23}{5}$											

$a_{32} = a_{32} - \frac{a_{32}}{a_{22}} \cdot a_{22} = 0$	5	-2	-13	1	-3	$a_{42} = a_{42} - \frac{a_{42}}{a_{22}} \cdot a_{22} = 0$	5	-2	-13	1	-3
$a_{33} = a_{33} - \frac{a_{32}}{a_{22}} \cdot a_{23} = \frac{153}{11}$	0	<del>22</del>	<del>-32</del>	<del>-6</del>	<del>23</del>	$a_{43} = a_{43} - \frac{a_{42}}{a_{22}} \cdot a_{23} = 0$	0	<del>22</del>	<del>-32</del>	<del>-6</del>	<del>23</del>
$a_{34} = a_{34} - \frac{a_{32}}{a_{22}} \cdot a_{24} = \frac{61}{11}$	0	0	<del>153</del>	<del>61</del>	<del>1035</del>	$a_{44} = a_{44} - \frac{a_{42}}{a_{22}} \cdot a_{24} = \frac{197}{11}$	0	0	<del>153</del>	<del>61</del>	<del>1035</del>
$b_3 = b_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} \cdot b_2 = \frac{1035}{110}$	0	<del>12</del>	<del>-107</del>	<del>29</del>	<del>78</del>	$b_4 = b_4 - \frac{a_{42}}{a_{22}} \cdot b_2 = \frac{71}{11}$	0	0	<del>-197</del>	<del>71</del>	<del>144</del>

αύξηση	5	-2	-13	1	-3	$a_{43} = a_{43} - \frac{a_{43}}{a_{33}} \cdot a_{33} = 0$
	0	<del>22</del>	<del>-32</del>	<del>-6</del>	<del>23</del>	$a_{44} = a_{44} - \frac{a_{43}}{a_{33}} \cdot a_{34} = \frac{22880}{2167}$
	0	0	<del>-197</del>	<del>71</del>	<del>144</del>	$b_4 = b_4 - \frac{a_{43}}{a_{33}} \cdot b_3 = \frac{424215}{2167}$
	0	0	<del>153</del>	<del>61</del>	<del>1035</del>	$a_{33}$ $2167$

$$\begin{array}{c|cccc} \rightarrow & 5 & -2 & -13 & 1 & -3 \\ & 0 & \frac{22}{5} & -\frac{32}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{23}{5} \\ & 0 & 0 & \frac{-197}{11} & \frac{71}{11} & \frac{144}{11} \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{22880}{2167} & \frac{424215}{2167} \end{array}$$

Αν ο A είναι ένας  $n \times n$  τριγωνικός πίνακας, τότε η  $\det(A)$  είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίας.

Στην άσκηση μας:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} = 5 \cdot \frac{22}{5} \cdot \left(\frac{-197}{11}\right) \cdot \frac{22880}{2167} = -4160 \neq 0$$

Για να είναι ένας πίνακας αντιστρέψιμος, θα πρέπει να είναι τετραγωνικός και επιπλέον η ορίζουσα του να είναι διάφορη του 0. Αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις, παίρνουμε τον πίνακα A και δίνει το γινόμενο του αντίστοιχο μοναδιαίο. Επομένως:

$$(A|I_4) = \begin{array}{cccc|cccc} 5 & -2 & -13 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & R_1 \\ 0 & \frac{22}{5} & -\frac{32}{5} & -\frac{6}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & R_2 \\ 0 & 0 & \frac{-197}{11} & \frac{71}{11} & 0 & 0 & 1 & 0 & R_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22880}{2167} & 0 & 0 & 0 & 1 & R_4 \end{array} \xrightarrow{R_1 + \frac{R_1}{5}}$$

Εκτελούμε γραμμολογίες ώστε βγει στην θέση του A να δημιουργηθεί ο μοναδιαίος πίνακας.

Όταν γίνει αυτό, σταματάω τη διαδικασία καθώς βγήκε στην θέση του αρχικά βρισκόταν ο μοναδιαίος πίνακας, βρίσκεται τώρα ο ζητούμενος αντίστροφος.

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{13}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{22}{5} & -\frac{32}{5} & -\frac{6}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-197}{11} & \frac{71}{11} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22880}{2167} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{11} R_2 \\ R_2 \leftarrow \frac{5}{22} R_2 \end{array}}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{175}{55} & \frac{1}{11} & \frac{1}{5} & \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{11} & -\frac{3}{11} & 0 & \frac{5}{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-197}{11} & \frac{71}{11} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22880}{2167} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{175}{55} & \frac{1}{11} & \frac{1}{5} & \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{11} & -\frac{3}{11} & 0 & \frac{5}{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{71}{197} & 0 & 0 & -\frac{11}{197} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22880}{2167} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 \leftarrow \frac{11}{197} R_3 \\ R_4 \leftarrow \frac{2167}{22880} R_4 \end{array}}$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -\frac{35}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{5} & \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{11} & -\frac{3}{11} & 0 & \frac{5}{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{197} & 0 & 0 & -\frac{11}{197} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2167}{22880} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} R_1 &\leftarrow 197R_1 - 35R_3 \\ R_2 &\leftarrow 197R_2 - 16R_3 \\ R_3 &\leftarrow -\frac{11}{197}R_3 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{2288}{11} & \frac{197}{5} & \frac{197}{11} & -35 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1727}{11} & 0 & \frac{2167}{11} & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{197} & 0 & 0 & -\frac{11}{197} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2167}{22880} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} R_1 &\leftarrow R_1 - \frac{2288}{11}R_4 \\ R_2 &\leftarrow R_2 - \frac{1727}{11}R_4 \\ R_3 &\leftarrow R_3 + \frac{11}{197}R_4 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{197}{5} & \frac{197}{11} & -35 & -\frac{2167}{110} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2167}{11} & -16 & \frac{3592160}{2167} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{197} & \frac{426899}{1624480} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2167}{22880} \end{array} \right]$$

Επιμένω ο αντίστροφος είναι:  $A^{-1} =$

$$\left[ \begin{array}{cccc} \frac{197}{5} & \frac{197}{11} & -35 & -\frac{2167}{110} \\ 0 & \frac{2167}{11} & -16 & \frac{3592160}{2167} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{197} & \frac{426899}{1624480} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2167}{22880} \end{array} \right]$$