Κεφάλαιο 3

Πεπερασμένες και διαιρεμένες διαφορές

Σε πολλά προβλήματα μια συνάρτηση δεν είναι γνωστή με τύπο αλλά μόνο από έναν πίνακα τιμών, π.χ. από μετρήσεις. Οι *διαφορές* των τιμών αυτών είναι το διακριτό ανάλογο των παραγώγων: αποκαλύπτουν τον ρυθμό μεταβολής, τον βαθμό του πολυωνύμου που περιγράφει τα δεδομένα, ακόμη και λάθη στον πίνακα. Αποτελούν επίσης τη βάση για την παρεμβολή (Κεφάλαιο 5) και την αριθμητική παραγώγιση (Κεφάλαιο 7).

Ως εισαγωγικό παράδειγμα, έστω ότι μετράμε ανά 10 δευτερόλεπτα την απόσταση $y = f(x)$ που έχει διανύσει ένα αυτοκίνητο. Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης είναι η ταχύτητα και ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας η επιτάχυνση· και οι δύο μπορούν να εκτιμηθούν από τις διαφορές διαδοχικών μετρήσεων (Παράδειγμα 3.1).

3.1 Σύνοψη θεωρίας

3.1.1 Πεπερασμένες διαφορές

Έστω οι τιμές $y_i = f(x_i)$ σε ισαπέχοντα σημεία $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Προς τα εμπρός, προς τα πίσω και κεντρικές διαφορές

$$\begin{aligned}
&\text{προς τα εμπρός:} && \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, && \Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i,\\
&\text{προς τα πίσω:} && \nabla y_i = y_i - y_{i-1}, && \nabla^k y_i = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1},\\
&\text{κεντρικές:} && \delta y_{i+1/2} = y_{i+1} - y_i, && \delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}.
\end{aligned}$$

Οι τρεις ορισμοί δίνουν *τους ίδιους αριθμούς* με διαφορετική αρίθμηση:

$$\nabla^k y_i = \Delta^k y_{i-k}, \qquad \delta^{2m} y_i = \Delta^{2m} y_{i-m}.$$

Αναλυτικός τύπος: $\Delta^k y_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} y_{i+j}$, π.χ. $\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$, $\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$.

Οι διαφορές οργανώνονται σε *πίνακα διαφορών*, όπου κάθε στήλη προκύπτει αφαιρώντας διαδοχικά στοιχεία της προηγούμενης. Από $n+1$ τιμές σχηματίζονται n πρώτες διαφορές, $n-1$ δεύτερες κ.ο.κ., και ο πίνακας εξαντλείται στη στήλη των διαφορών τάξης n. Στον πίνακα οι προς τα εμπρός διαφορές ενός σημείου βρίσκονται στη διαγώνιο που *κατεβαίνει* από αυτό, οι προς τα πίσω στη διαγώνιο που *ανεβαίνει*, και οι κεντρικές άρτιας τάξης στην ίδια οριζόντια γραμμή.

Βασικές ιδιότητες

1. **Πολυώνυμα.** Αν f είναι πολυώνυμο βαθμού n με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου a_n, τότε οι διαφορές τάξης n είναι σταθερές, $\Delta^n f = n!\, a_n\, h^n$, και όλες οι ανώτερες μηδενικές.
2. **Σχέση με τις παραγώγους.** $\Delta^k f(x) = h^k f^{(k)}(\xi)$ για κάποιο $\xi \in (x, x+kh)$. Άρα $f' \approx \Delta y/h$, $f'' \approx \Delta^2 y/h^2$ κ.ο.κ.
3. **Διάδοση σφαλμάτων.** Ένα σφάλμα ε σε μία τιμή του πίνακα εμφανίζεται στις διαφορές τάξης k με συντελεστές $(-1)^j\binom{k}{j}$: π.χ. $\varepsilon(1,-4,6,-4,1)$ στις τέταρτες. Σφάλματα στρογγύλευσης μεγέθους έως δ σε όλες τις τιμές δίνουν σφάλμα έως $2^k\delta$ στις διαφορές τάξης k.
4. **Τύπος Newton προς τα εμπρός.** Το πολυώνυμο βαθμού $\le n$ που διέρχεται από τα σημεία του πίνακα είναι

$$p(x_0+sh) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k y_0, \qquad \binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}.$$

Η ιδιότητα 1 χρησιμοποιείται αντίστροφα: αν οι διαφορές κάποιας τάξης ενός πίνακα είναι (σχεδόν) σταθερές, τα δεδομένα περιγράφονται καλά από πολυώνυμο αυτού του βαθμού. Η ιδιότητα 3 εξηγεί γιατί οι διαφορές υψηλής τάξης πειραματικών δεδομένων είναι άχρηστες: οι πραγματικές διαφορές μικραίνουν ως h^k, ενώ ο θόρυβος μεγαλώνει ως 2^k.

3.1.2 Διαιρεμένες διαφορές

Όταν τα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *δεν ισαπέχουν*, τη θέση των πεπερασμένων διαφορών παίρνουν οι διαιρεμένες.

Διαιρεμένες διαφορές

$$f[x_i] = f(x_i), \qquad f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i},$$

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

- Είναι **συμμετρικές**: η τιμή τους δεν εξαρτάται από τη σειρά των σημείων.
- $f[x_0, \ldots, x_k] = \dfrac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$ για κάποιο ξ μεταξύ του μικρότερου και του μεγαλύτερου x_i.
- Για ισαπέχοντα σημεία: $f[x_0, \ldots, x_k] = \dfrac{\Delta^k y_0}{k!\, h^k}$.
- **Μορφή Newton** του πολυωνύμου παρεμβολής:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Οι συντελεστές της μορφής Newton είναι τα πρώτα στοιχεία των στηλών του πίνακα διαιρεμένων διαφορών. Το πολυώνυμο υπολογίζεται με σχήμα ανάλογο του Horner (Άσκηση 1.13), και η προσθήκη ενός νέου σημείου απαιτεί μόνο έναν επιπλέον όρο, χωρίς να αλλάξουν οι προηγούμενοι. Η μορφή Newton μελετάται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 5.

3.2 Υλοποιήσεις αναφοράς

Ο πίνακας διαφορών αποθηκεύεται *ανά τάξη*: για κάθε $j = 0, 1, \ldots, k$ αποθηκεύονται οι τιμές $\Delta^j y_i$, $i = 0, \ldots, n-j$. Οι προς τα πίσω και οι κεντρικές διαφορές δεν υπολογίζονται χωριστά· διαβάζονται από τον ίδιο πίνακα με μετατόπιση του δείκτη. Οι συναρτήσεις είναι:

`diff_table`	πίνακας πεπερασμένων διαφορών έως την τάξη k
`print_table`	εκτύπωση: η γραμμή i περιέχει τα x_i, y_i, Δy_i, $\Delta^2 y_i, \ldots$
`divided_table`	πίνακας διαιρεμένων διαφορών
`newton_eval`	τιμή του πολυωνύμου Newton σε σημείο t

Ο πίνακας διαφορών είναι ένας συνηθισμένος πίνακας D με $D(i,\, j+1) = \Delta^j y_i$ (η αρίθμηση αρχίζει από το 1). Η ενσωματωμένη συνάρτηση `diff(y, k)` επιστρέφει απευθείας τις διαφορές τάξης k.

Octave/MATLAB `diff_table.m`

```
function D = diff_table(y, kmax)
% DIFF_TABLE  Forward-difference table.
%   D(i, j+1) = Delta^j y_i for j = 0..kmax, i = 1..n-j (other entries are 0).
%   Backward and central differences are the same numbers:
%     Nabla^j y_i = D(i-j, j+1),   delta^j y_i = D(i-j/2, j+1)  (j even).
  n = numel(y);
  D = zeros(n, kmax + 1);
  D(:, 1) = y(:);
  for j = 1:kmax
    D(1:n - j, j + 1) = D(2:n - j + 1, j) - D(1:n - j, j);
  end
end
```

Octave/MATLAB `print_table.m`

```
function print_table(x, D, fmt)
% PRINT_TABLE  Row i shows x_i, y_i, Delta y_i, Delta^2 y_i, ...
  n = size(D, 1);
  for i = 1:n
    fprintf('%8.3f', x(i));
    for j = 0:size(D, 2) - 1
      if i <= n - j
        fprintf([' ' fmt], D(i, j + 1));
      end
    end
    fprintf('\n');
  end
end
```

Octave/MATLAB `divided_table.m`

```
function F = divided_table(x, y)
% DIVIDED_TABLE  Divided differences: F(i, j+1) = f[x_i, ..., x_{i+j}].
%   The first row F(1, :) holds the coefficients of the Newton polynomial.
  n = numel(x);
  F = zeros(n);
  F(:, 1) = y(:);
  for j = 1:n - 1
    for i = 1:n - j
      F(i, j + 1) = (F(i + 1, j) - F(i, j)) / (x(i + j) - x(i));
```

```
    end
  end
end
```

Octave/MATLAB `newton_eval.m`

```
function p = newton_eval(x, c, t)
% NEWTON_EVAL  Value at t of c(1) + c(2)(t-x(1)) + c(3)(t-x(1))(t-x(2)) + ...
  m = numel(c);
  p = c(m);
  for k = m - 1:-1:1
    p = p * (t - x(k)) + c(k);
  end
end
```

3.3 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 3.1 (Απόσταση, ταχύτητα και επιτάχυνση)**.** Η απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο μετριέται ανά 10 s:

x (s)	0	10	20	30	40	50	60
y (m)	0	212	740	1430	2280	3172	4114

Να σχηματιστεί ο πίνακας διαφορών και να εκτιμηθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση.

Λύση. Ο πίνακας, στην κλασική «κλιμακωτή» διάταξη, όπου κάθε διαφορά γράφεται ανάμεσα στις δύο τιμές από τις οποίες προέκυψε:

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
0	0						
		212					
10	212		316				
		528		-154			
20	740		162		152		
		690		-2		-268	
30	1430		160		-116		510
		850		-118		242	
40	2280		42		126		
		892		8			
50	3172		50				
		942					
60	4114						

Οι πρώτες διαφορές διαιρεμένες με $h = 10\,\mathrm{s}$ δίνουν τη μέση ταχύτητα σε κάθε διάστημα: 21.2, 52.8, 69.0, 85.0, 89.2, 94,2 m/s. Οι δεύτερες διαφορές διαιρεμένες με h^2 δίνουν την επιτάχυνση: 3.16, 1.62, 1.60, 0.42, 0,50 $\mathrm{m/s^2}$. Το αυτοκίνητο επιταχύνει έντονα στην αρχή και σχεδόν σταθεροποιεί την ταχύτητά του στο τέλος.

Οι διαφορές ανώτερης τάξης όχι μόνο δεν μικραίνουν αλλά μεγαλώνουν και εναλλάσσουν πρόσημο (-154, 152, -268, 510): χαρακτηριστική εικόνα δεδομένων με σφάλματα μέτρησης, που δεν περιγράφονται από πολυώνυμο χαμηλού βαθμού. Οι διαφορές πέρα από τη δεύτερη δεν περιέχουν εδώ χρήσιμη πληροφορία.

Τα προγράμματα τυπώνουν τον πίνακα σε *οριζόντια* διάταξη: η γραμμή του x_i περιέχει τις προς τα εμπρός διαφορές $\Delta^j y_i$.

Octave/MATLAB ex31_car.m

```
% Example 3.1: difference table of the distance travelled by a car
x = [0 10 20 30 40 50 60];                  % time, s
y = [0 212 740 1430 2280 3172 4114];        % distance, m

D = diff_table(y, 6);
print_table(x, D, '%6.0f');
h = 10;
fprintf('mean speed (m/s)   :');  fprintf(' %.1f', D(1:6, 2) / h);    fprintf('\n');
fprintf('acceleration (m/s2):');  fprintf(' %.2f', D(1:5, 3) / h^2);  fprintf('\n');
% the built-in function diff(y, k) returns the k-th differences directly
```

Έξοδος

```
  0.000      0    212    316   -154    152   -268    510
 10.000    212    528    162     -2   -116    242
 20.000    740    690    160   -118    126
 30.000   1430    850     42      8
 40.000   2280    892     50
 50.000   3172    942
 60.000   4114
mean speed (m/s)   : 21.2 52.8 69.0 85.0 89.2 94.2
acceleration (m/s2): 3.16 1.62 1.60 0.42 0.50
```

Παράδειγμα 3.2 (Διαφορές πολυωνύμων)**.** Να σχηματιστούν οι πίνακες διαφορών (α) της $y = x^3 - 8x^2 - 4x - 1$ στα σημεία $x = 0, 0.1, \ldots, 0.9$ έως την 4η τάξη και (β) της $y = x^4 - 2x + 10$ στα σημεία $x = -0.3, -0.2, \ldots, 0.3$ έως την 5η τάξη.

Λύση. (α) Για πολυώνυμο τρίτου βαθμού με $a_3 = 1$ και $h = 0.1$ οι τρίτες διαφορές πρέπει να είναι σταθερές και ίσες με $3!\, a_3 h^3 = 0.006$, και οι τέταρτες μηδενικές. Αυτό ακριβώς δείχνει η έξοδος.

(β) Για το πολυώνυμο τετάρτου βαθμού οι τέταρτες διαφορές είναι σταθερές, $4!\, h^4 = 0.0024$, και οι πέμπτες μηδενικές. Οι τρίτες διαφορές δεν είναι σταθερές $(-0.0036, -0.0012, 0.0012, 0.0036)$, μεταβάλλονται όμως γραμμικά, όπως αναμένεται.

Στην έξοδο εμφανίζονται οι τιμές `-0.0000`: οι διαφορές που θα έπρεπε να είναι ακριβώς μηδέν είναι της τάξης του 10^{-15}, λόγω της στρογγύλευσης στον υπολογισμό των y_i (το 0.1 δεν αναπαρίσταται ακριβώς, Ενότητα 1.8).

Octave/MATLAB ex32_poly.m

```
% Example 3.2: difference tables of two polynomials
x = 0.1 * (0:9);                            % 0, 0.1, ..., 0.9
y = x.^3 - 8 * x.^2 - 4 * x - 1;
fprintf('y = x^3 - 8x^2 - 4x - 1\n');
print_table(x, diff_table(y, 4), '%9.4f');

x = 0.1 * (-3:3);                           % -0.3, ..., 0.3
y = x.^4 - 2 * x + 10;
fprintf('y = x^4 - 2x + 10\n');
print_table(x, diff_table(y, 5), '%9.4f');
```

Έξοδος

```
y = x^3 - 8x^2 - 4x - 1
   0.000   -1.0000   -0.4790   -0.1540    0.0060    0.0000
   0.100   -1.4790   -0.6330   -0.1480    0.0060    0.0000
   0.200   -2.1120   -0.7810   -0.1420    0.0060   -0.0000
   0.300   -2.8930   -0.9230   -0.1360    0.0060    0.0000
   0.400   -3.8160   -1.0590   -0.1300    0.0060   -0.0000
   0.500   -4.8750   -1.1890   -0.1240    0.0060   -0.0000
   0.600   -6.0640   -1.3130   -0.1180    0.0060
   0.700   -7.3770   -1.4310   -0.1120
   0.800   -8.8080   -1.5430
   0.900  -10.3510
y = x^4 - 2x + 10
  -0.300   10.6081   -0.2065    0.0050   -0.0036    0.0024   -0.0000
  -0.200   10.4016   -0.2015    0.0014   -0.0012    0.0024    0.0000
  -0.100   10.2001   -0.2001    0.0002    0.0012    0.0024
   0.000   10.0000   -0.1999    0.0014    0.0036
   0.100    9.8001   -0.1985    0.0050
   0.200    9.6016   -0.1935
   0.300    9.4081
```

Παράδειγμα 3.3 (Προς τα εμπρός, προς τα πίσω και κεντρικές διαφορές)**.** Από τον πίνακα του Παραδείγματος 3.2(β) να διαβαστούν οι προς τα εμπρός, προς τα πίσω και κεντρικές διαφορές στο σημείο $x = 0$ και να εκτιμηθούν οι $f'(0)$ και $f''(0)$.

Λύση. Το $x = 0$ είναι ο κόμβος $i = 3$ (με αρίθμηση από το 0). Από τον πίνακα:

$$\begin{aligned}
&\Delta y_3 = y_4 - y_3 = -0.1999, && \Delta^2 y_3 = 0.0014, && \Delta^3 y_3 = 0.0036,\\
&\nabla y_3 = \Delta y_2 = -0.2001, && \nabla^2 y_3 = \Delta^2 y_1 = 0.0014, && \nabla^3 y_3 = \Delta^3 y_0 = -0.0036,\\
&\delta^2 y_3 = \Delta^2 y_2 = 0.0002, && \delta^4 y_3 = \Delta^4 y_1 = 0.0024.
\end{aligned}$$

Οι προς τα εμπρός διαφορές χρησιμοποιούν μόνο τιμές δεξιά του σημείου, οι προς τα πίσω μόνο αριστερά, οι κεντρικές συμμετρικά και από τις δύο πλευρές. Για την πρώτη παράγωγο ($f'(0) = -2$ ακριβώς):

$$\frac{\Delta y_3}{h} = -1.9990, \qquad \frac{\nabla y_3}{h} = -2.0010, \qquad \frac{y_4 - y_2}{2h} = -2.0000.$$

Η κεντρική εκτίμηση είναι πολύ ακριβέστερη: το σφάλμα της είναι ανάλογο του h^2, ενώ των άλλων δύο ανάλογο του h (Κεφάλαιο 7). Για τη δεύτερη παράγωγο η κεντρική διαφορά δίνει $\delta^2 y_3/h^2 = 0.02$, ενώ $f''(0) = 0$· το σφάλμα $\frac{h^2}{12} f^{(4)} = \frac{0.01}{12} \cdot 24 = 0.02$ είναι ακριβώς αυτό που προβλέπει η θεωρία.

Octave/MATLAB `ex33_readings.m`

```
% Example 3.3: forward, backward and central differences from one table
h = 0.1;
x = 0.1 * (-3:3);
y = x.^4 - 2 * x + 10;
D = diff_table(y, 4);
i = 4;                                          % the node x = 0 (indices start at 1)
fprintf('forward : %9.4f %9.4f %9.4f\n', D(i, 2), D(i, 3), D(i, 4));
fprintf('backward: %9.4f %9.4f %9.4f\n', D(i - 1, 2), D(i - 2, 3), D(i - 3, 4));
fprintf('central : delta^2 = %.4f, delta^4 = %.4f\n', D(i - 1, 3), D(i - 2, 5));
fprintf('f''(0)  ~ %.4f (forward), %.4f (backward), %.4f (central)   exact -2\n', ...
        D(i, 2) / h, D(i - 1, 2) / h, (y(i + 1) - y(i - 1)) / (2 * h));
fprintf('f''''(0) ~ %.4f   exact 0\n', D(i - 1, 3) / h^2);
```

Έξοδος

```
forward :   -0.1999    0.0014    0.0036
backward:   -0.2001    0.0014   -0.0036
central : delta^2 = 0.0002, delta^4 = 0.0024
f'(0)  ~ -1.9990 (forward), -2.0010 (backward), -2.0000 (central)   exact -2
f''(0) ~ 0.0200   exact 0
```

Παράδειγμα 3.4 (Διαιρεμένες διαφορές: θερμοχωρητικότητα χαλκού)**.** Η γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα του χαλκού έχει μετρηθεί σε θερμοκρασίες που δεν ισαπέχουν:

T (K)	100	150	200	250	298	400
c_p (J/(mol K))	16.0	20.5	22.6	23.8	24.4	25.3

Να σχηματιστεί ο πίνακας διαιρεμένων διαφορών και να εκτιμηθεί η c_p στους 175 K.

Λύση. Οι πρώτες διαιρεμένες διαφορές είναι οι κλίσεις μεταξύ διαδοχικών σημείων, π.χ.

$$f[T_0,T_1]=\frac{20.5-16.0}{150-100}=0.090, \qquad f[T_1,T_2]=\frac{22.6-20.5}{200-150}=0.042,$$

και οι δεύτερες προκύπτουν από τις πρώτες, διαιρώντας με την απόσταση των *ακραίων* σημείων:

$$f[T_0,T_1,T_2]=\frac{0.042-0.090}{200-100}=-4.8\times10^{-4}.$$

Οι κλίσεις μειώνονται συνεχώς (η καμπύλη $c_p(T)$ τείνει στην τιμή Dulong–Petit), γι' αυτό οι δεύτερες διαφορές είναι αρνητικές.

Η πρώτη γραμμή του πίνακα δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου Newton. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά 2, 3, …, 6 σημεία, η εκτίμηση για τους 175 K είναι 22.750, 21.850, 21.756, 21.728, 21.717: οι διορθώσεις μικραίνουν γρήγορα, και $c_p(175\,\mathrm{K})\approx 21{,}7\,\mathrm{J/(mol\,K)}$. Η πρώτη εκτίμηση (ευθεία από τα σημεία των 100 και 150 K) είναι *παρεκβολή* και γι' αυτό η χειρότερη.

Octave/MATLAB `ex34_divided.m`

```
% Example 3.4: divided differences for unequally spaced data (c_p of copper)
T  = [100 150 200 250 298 400];            % K
cp = [16.0 20.5 22.6 23.8 24.4 25.3];      % J/(mol K)
n  = numel(T);

F = divided_table(T, cp);
for i = 1:n
  fprintf('%6.0f', T(i));
  fprintf(' %12.4e', F(i, 1:n - i + 1));
  fprintf('\n');
end
c = F(1, :);                               % Newton coefficients
for m = 2:n                                % polynomials through the first m points
  fprintf('%d points: cp(175 K) = %.3f\n', m, newton_eval(T, c(1:m), 175));
end
```

Έξοδος

```
   100   1.6000e+01   9.0000e-02  -4.8000e-04   2.0000e-06  -7.9630e-09   2.7088e-11
   150   2.0500e+01   4.2000e-02  -1.8000e-04   4.2333e-07   1.6342e-10
   200   2.2600e+01   2.4000e-02  -1.1735e-04   4.6419e-07
   250   2.3800e+01   1.2500e-02  -2.4510e-05
   298   2.4400e+01   8.8235e-03
   400   2.5300e+01
2 points: cp(175 K) = 22.750
3 points: cp(175 K) = 21.850
4 points: cp(175 K) = 21.756
5 points: cp(175 K) = 21.728
6 points: cp(175 K) = 21.717
```

Παράδειγμα 3.5 (Εντοπισμός λάθους σε πίνακα)**.** Ο παρακάτω πίνακας δίνει την πλεγματική σταθερά a (σε Å) του κράματος $\mathrm{Si}_{1-x}\mathrm{Ge}_x$ ως συνάρτηση της σύστασης. Υπάρχει υποψία ότι μία τιμή έχει αντιγραφεί λάθος. Να εντοπιστεί και να διορθωθεί.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
a	5.4310	5.4513	5.4721	5.4934	5.5153	5.5377	5.5670	5.5842	5.6083	5.6329	5.6580

Λύση. Η πλεγματική σταθερά μεταβάλλεται ομαλά με τη σύσταση (σχεδόν γραμμικά, κατά τον νόμο του Vegard, με μικρή καμπυλότητα), άρα οι διαφορές τρίτης και τέταρτης τάξης πρέπει να είναι σχεδόν μηδενικές. Στον πίνακα διαφορών όμως οι τέταρτες διαφορές είναι

$$0.0001,\ -0.0002,\ 0.0065,\ -0.0254,\ 0.0380,\ -0.0254,\ 0.0064,$$

δηλαδή περίπου $\varepsilon\,(1,-4,6,-4,1)$ με $\varepsilon \approx 0.0063$: το αποτύπωμα ενός μεμονωμένου σφάλματος. Η μεγαλύτερη τιμή (6ε) είναι η $\Delta^4 a_4$, που έχει ως κεντρικό σημείο το a_6· άρα λανθασμένη είναι η τιμή στο $x = 0.6$, με σφάλμα $\varepsilon = 0.0380/6 = 0.0063$. Η διορθωμένη τιμή είναι $5.5670 - 0.0063 = 5.5607$: στην αντιγραφή αντιμετατέθηκαν τα δύο τελευταία ψηφία. Μετά τη διόρθωση η μεγαλύτερη τέταρτη διαφορά είναι 0.0002, της τάξης του σφάλματος στρογγύλευσης των δεδομένων ($2^4 \cdot 0.5 \times 10^{-4} = 0.0008$).

Octave/MATLAB `ex35_error.m`

```
% Example 3.5: locating and correcting a wrong entry in a table
x = 0.1 * (0:10);                          % Ge fraction in Si(1-x)Ge(x)
a = [5.4310 5.4513 5.4721 5.4934 5.5153 5.5377 ...
     5.5670 5.5842 5.6083 5.6329 5.6580];    % lattice parameter, Angstrom

D = diff_table(a, 4);
print_table(x, D, '%8.4f');
[~, i] = max(abs(D(1:7, 5)));              % largest 4th difference
m = i + 2;                                 % pattern (1,-4,6,-4,1) is centred there
err = D(i, 5) / 6;
fprintf('suspect entry: x = %.1f, a = %.4f, estimated error = %+.4f\n', x(m), a(m), err);
a(m) = a(m) - err;
fprintf('corrected value: %.4f\n', a(m));
D = diff_table(a, 4);
fprintf('largest |4th difference| after the correction: %.4f\n', max(abs(D(1:7, 5))));
```

Έξοδος

```
   0.000   5.4310   0.0203   0.0005  -0.0000   0.0001
   0.100   5.4513   0.0208   0.0005   0.0001  -0.0002
   0.200   5.4721   0.0213   0.0006  -0.0001   0.0065
   0.300   5.4934   0.0219   0.0005   0.0064  -0.0254
   0.400   5.5153   0.0224   0.0069  -0.0190   0.0380
   0.500   5.5377   0.0293  -0.0121   0.0190  -0.0254
   0.600   5.5670   0.0172   0.0069  -0.0064   0.0064
   0.700   5.5842   0.0241   0.0005  -0.0000
   0.800   5.6083   0.0246   0.0005
   0.900   5.6329   0.0251
   1.000   5.6580
suspect entry: x = 0.6, a = 5.5670, estimated error = +0.0063
corrected value: 5.5607
largest |4th difference| after the correction: 0.0002
```

3.4 Ασκήσεις

Α. Βασικές ασκήσεις

Άσκηση 3.1 ★ (πίνακας διαφορών με το χέρι)**.** Σχηματίστε τον πίνακα διαφορών για τα δεδομένα

x	1	2	3	4	5
y	2	3	12	35	78

Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου που διέρχεται από τα σημεία και ποιος ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του;

Άσκηση 3.2 ★ (ανάγνωση του πίνακα)**.** Από τον πίνακα της Άσκησης 3.1 διαβάστε τις ποσότητες Δy_1, $\Delta^2 y_0$, ∇y_4, $\nabla^2 y_4$, $\nabla^3 y_4$, $\delta^2 y_2$ και $\delta^4 y_2$ (με $y_0 = 2, \ldots, y_4 = 78$). Επαληθεύστε τις σχέσεις $\nabla^k y_i = \Delta^k y_{i-k}$ και $\delta^2 y_i = \Delta^2 y_{i-1}$.

Άσκηση 3.3 ★ (εύρεση πολυωνύμου)**.** Για τον πίνακα

x	0	1	2	3	4	5
y	1	3	11	31	69	131

βρείτε από τις διαφορές τον βαθμό του πολυωνύμου και στη συνέχεια το ίδιο το πολυώνυμο με τον τύπο του Newton προς τα εμπρός. Προβλέψτε την τιμή για $x = 6$ επεκτείνοντας τον πίνακα.

Άσκηση 3.4 ★ (συμπλήρωση τιμής)**.** Στον πίνακα

x	0	1	2	3	4
y	1	2	;	28	65

λείπει μία τιμή. Υποθέτοντας ότι τα δεδομένα προέρχονται από πολυώνυμο τρίτου βαθμού, βρείτε τη από τη συνθήκη $\Delta^4 y_0 = 0$.

Άσκηση 3.5 ★ (διαιρεμένες διαφορές με το χέρι)**.** Σχηματίστε τον πίνακα διαιρεμένων διαφορών για τα σημεία $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 13)$, $(4, 21)$ και γράψτε το πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή Newton. Ποιος είναι ο βαθμός του;

Άσκηση 3.6 ★ (ιδιότητες των διαιρεμένων διαφορών)**.** (α) Υπολογίστε την $f[x_0, x_1, x_2]$ της Άσκησης 3.5 με τα σημεία σε διαφορετική σειρά και επαληθεύστε ότι δεν αλλάζει. (β) Για τα ισαπέχοντα δεδομένα της Άσκησης 3.1 επαληθεύστε ότι $f[x_0, x_1, x_2] = \Delta^2 y_0/(2!\,h^2)$ και $f[x_0, \ldots, x_3] = \Delta^3 y_0/(3!\,h^3)$.

Άσκηση 3.7 ★ (έλεγχος με το πρόγραμμα)**.** Εκτελέστε το πρόγραμμα του Παραδείγματος 3.2 και εξηγήστε, χωρίς να κάνετε πράξεις, ποια θα είναι η τιμή των τρίτων διαφορών της $y = 2x^3 - 8x^2 - 4x - 1$ με βήμα $h = 0.2$ και ποια των τέταρτων διαφορών της $y = x^4 - 2x + 10$ με βήμα $h = 0.5$. Επαληθεύστε.

Άσκηση 3.8 ★ (διαφορές στοιχειωδών συναρτήσεων)**.** Δείξτε ότι, με βήμα h: (α) $\Delta\, a^x = (a^h - 1)\, a^x$, άρα για $h = 1$ είναι $\Delta\, 2^x = 2^x$· (β) $\Delta \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\!\left(x + \frac{h}{2}\right)$· (γ) $\Delta\, x^{(n)} = n h\, x^{(n-1)}$, όπου $x^{(n)} = x(x-h)\cdots(x-(n-1)h)$ η «παραγοντική δύναμη». Ποιοι κανόνες παραγώγισης αντιστοιχούν σε αυτές τις σχέσεις;

Β. Προγραμματιστικές ασκήσεις

Άσκηση 3.9 ★★ (κλιμακωτή εκτύπωση)**.** Γράψτε συνάρτηση που τυπώνει τον πίνακα διαφορών στην κλιμακωτή διάταξη του Παραδείγματος 3.1, με κάθε διαφορά ανάμεσα στις δύο τιμές από τις οποίες προκύπτει.

Άσκηση 3.10 ★★ (πίνακας προς τα πίσω διαφορών)**.** Γράψτε συνάρτηση `back_table` που υπολογίζει *απευθείας* τις προς τα πίσω διαφορές $\nabla^j y_i$ από τον αναδρομικό ορισμό τους και επαληθεύστε αριθμητικά τη σχέση $\nabla^j y_i = \Delta^j y_{i-j}$ για τα δεδομένα του Παραδείγματος 3.1.

Άσκηση 3.11 ★★ (θόρυβος στρογγύλευσης)**.** Σχηματίστε τον πίνακα διαφορών της $\sin x$ στα σημεία $x = 0, 0.1, \ldots, 1$ (α) με τις ακριβείς τιμές και (β) με τις τιμές στρογγυλευμένες σε 4 δεκαδικά ψηφία. Για κάθε τάξη $k = 1, \ldots, 8$ συγκρίνετε τη μέγιστη απόλυτη διαφορά στις δύο περιπτώσεις με το φράγμα $2^k \cdot 0.5 \times 10^{-4}$. Από ποια τάξη και μετά οι διαφορές των στρογγυλευμένων δεδομένων είναι καθαρός θόρυβος;

Άσκηση 3.12 ★★ (αυτόματη διόρθωση πίνακα)**.** Γενικεύστε το πρόγραμμα του Παραδείγματος 3.5 σε συνάρτηση που δέχεται έναν πίνακα τιμών, εντοπίζει τη θέση ενός μεμονωμένου σφάλματος από τις τέταρτες διαφορές και επιστρέφει τη διορθωμένη τιμή. Δοκιμάστε τη στα δεδομένα

$$300,\ 279,\ 256,\ 231,\ 240,\ 175,\ 144,\ 111,\ 76.$$

Τι συμβαίνει όταν το σφάλμα βρίσκεται σε μία από τις δύο πρώτες ή τις δύο τελευταίες τιμές;

Άσκηση 3.13 ★★ (διαιρεμένες διαφορές με ένα διάνυσμα)**.** Οι συντελεστές Newton $c_k = f[x_0, \ldots, x_k]$ μπορούν να υπολογιστούν χωρίς διδιάστατο πίνακα: ξεκινώντας με $c_i = y_i$, για $j = 1, \ldots, n$ και για $i = n, n-1, \ldots, j$ θέτουμε $c_i \leftarrow (c_i - c_{i-1})/(x_i - x_{i-j})$. Υλοποιήστε τον αλγόριθμο, εφαρμόστε τον στην $f(x) = 1/x$ με $x = 1, 2, 4, 5, 8$ και υπολογίστε το πολυώνυμο στο $x = 3$. Γιατί ο εσωτερικός βρόχος πρέπει να εκτελείται από το τέλος προς την αρχή;

Άσκηση 3.14 ★★ (παράγωγος από προς τα εμπρός διαφορές)**.** Από τη σχέση $hD = \ln(1 + \Delta)$ της Άσκησης 3.23 προκύπτει ο τύπος

$$h\, f'(x_0) = \Delta y_0 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \tfrac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \tfrac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \ldots$$

Εφαρμόστε τον τύπο στην $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $h = 0.1$, με $1, 2, \ldots, 5$ όρους και καταγράψτε το σφάλμα. Πώς μειώνεται με κάθε επιπλέον όρο;

Άσκηση 3.15 ★★ (αθροίσματα δυνάμεων)**.** Τα μερικά αθροίσματα $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ για $n = 0, 1, 2, 3, 4$ είναι $0, 1, 5, 14, 30$. Σχηματίστε τον πίνακα διαφορών, δείξτε ότι οι τρίτες διαφορές είναι σταθερές και βρείτε κλειστό τύπο για το S_n με τον τύπο του Newton προς τα εμπρός. Γράψτε πρόγραμμα που κάνει το ίδιο για $\sum k^3$ και $\sum k^4$.

Γ. Προχωρημένα μαθηματικά προβλήματα

Άσκηση 3.16 ★★★ (αναλυτικός τύπος των διαφορών)**.** Αποδείξτε με επαγωγή ότι

$$\Delta^k y_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} y_{i+j}.$$

Άσκηση 3.17 ★★★ (διαφορές πολυωνύμου)**.** Αποδείξτε ότι αν $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, τότε η Δp είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$ με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $n\,a_n h$, και συμπεράνετε ότι $\Delta^n p = n!\,a_n h^n$ και $\Delta^{n+1} p = 0$.

Άσκηση 3.18 ★★★ (διαφορές και παράγωγοι)**.** Αποδείξτε ότι αν $f \in C^k$, τότε $\Delta^k f(x) = h^k f^{(k)}(\xi)$ για κάποιο $\xi \in (x, x + kh)$. (Υπόδειξη: επαγωγή, με το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $g(x) = \Delta^{k-1} f(x)$.)

Άσκηση 3.19 ★★★ (συμμετρία των διαιρεμένων διαφορών)**.** Αποδείξτε με επαγωγή ότι

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)},$$

και συμπεράνετε ότι η διαιρεμένη διαφορά δεν εξαρτάται από τη σειρά των σημείων.

Άσκηση 3.20 ★★★ (διαιρεμένες διαφορές και παράγωγοι)**.** Δεχόμενοι ότι το πολυώνυμο παρεμβολής p_n στα $x_0, \ldots, x_n$ έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $f[x_0, \ldots, x_n]$, αποδείξτε με το θεώρημα του Rolle ότι $f[x_0, \ldots, x_n] = f^{(n)}(\xi)/n!$. Τι δίνει ο τύπος όταν όλα τα σημεία τείνουν στο ίδιο σημείο;

Άσκηση 3.21 ★★★ (ισαπέχοντα σημεία)**.** Αποδείξτε με επαγωγή ότι για ισαπέχοντα σημεία $x_i = x_0 + ih$ ισχύει

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k y_0}{k!\, h^k},$$

και από αυτό ότι η μορφή Newton ανάγεται στον τύπο του Newton προς τα εμπρός.

Άσκηση 3.22 ★★★ (διάδοση σφαλμάτων)**.** (α) Δείξτε ότι αν μόνο η τιμή y_m έχει σφάλμα ε, τότε οι διαφορές τάξης k που την περιέχουν έχουν σφάλματα $(-1)^j \binom{k}{j} \varepsilon$. (β) Δείξτε ότι αν κάθε y_i έχει σφάλμα το πολύ δ, το σφάλμα κάθε $\Delta^k y_i$ είναι το πολύ $2^k \delta$ και ότι το φράγμα αυτό μπορεί να επιτευχθεί. (γ) Για πίνακα της $\sin x$ με βήμα $h = 0.1$ και 4 δεκαδικά ψηφία, βρείτε τη μεγαλύτερη τάξη διαφορών που έχει νόημα και συγκρίνετε με την Άσκηση 3.11.

Άσκηση 3.23 ★★★ (λογισμός τελεστών)**.** Ορίζουμε τους τελεστές $Ef(x) = f(x+h)$, $\Delta = E - 1$, $\nabla = 1 - E^{-1}$, $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$ και $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$.

(α′) Δείξτε ότι $\Delta\nabla = \nabla\Delta = \delta^2$ και $\Delta^k = \sum_j (-1)^{k-j} \binom{k}{j} E^j$.

(β′) Από το ανάπτυγμα Taylor δείξτε (τυπικά) ότι $E = e^{hD}$, άρα $hD = \ln(1+\Delta) = -\ln(1-\nabla)$, και γράψτε τους πρώτους όρους των δύο σειρών.

(γ′) Υψώνοντας στο τετράγωνο, βρείτε τύπο για την $h^2 f''$ με προς τα εμπρός διαφορές έως την τέταρτη τάξη.

Άσκηση 3.24 ★★★ (άθροιση με διαφορές)**.** (α) Δείξτε ότι $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta f_k = f_n - f_0$ (το διακριτό ανάλογο του θεμελιώδους θεωρήματος του λογισμού). (β) Με $h = 1$ και $k^{(m)} = k(k-1)\cdots(k-m+1)$, δείξτε ότι $\sum_{k=0}^{n} k^{(m)} = (n+1)^{(m+1)}/(m+1)$. (γ) Γράψτε το k^3 ως συνδυασμό παραγοντικών δυνάμεων και αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\tfrac{1}{2} n(n+1)\right]^2$.

3.5 Απαντήσεις επιλεγμένων ασκήσεων

3.1 Δ: $1, 9, 23, 43$· Δ^2: $8, 14, 20$· Δ^3: $6, 6$· $\Delta^4 = 0$. Βαθμός 3, $a_3 = 1$.

3.2 9, 8, 43, 20, 6, 14, 0.

3.3 $y = x^3 + x + 1$· $y(6) = 223$.

3.4 9.

3.5 $p(x) = 1 + 2x + x(x-1) = x^2 + x + 1$, βαθμού 2.

3.7 0.096 και 1.5.

3.11 Από την τάξη $k = 4$.

3.12 Δείκτης 4 (με αρίθμηση από το 0): $240 \to 204$.

3.13 $c = (1,\ -0.5,\ 0.125,\ -0.025,\ 0.003125)$· $p(3) = 0.3125$.

3.15 $S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

3.6 Πλήρεις λύσεις

Το πρόγραμμα `sol_methods` (Ασκήσεις 3.11–3.14) καλύπτει τις προγραμματιστικές ασκήσεις. Για τις Ασκήσεις 3.9, 3.10 και 3.15 δίνονται υποδείξεις στο τέλος.

3.6.1 Ομάδα Α

Λύση της Άσκησης 3.1.

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1	2				
		1			
2	3		8		
		9		6	
3	12		14		0
		23		6	
4	35		20		
		43			
5	78				

Οι τρίτες διαφορές είναι σταθερές και η τέταρτη μηδενική: τα σημεία βρίσκονται πάνω σε πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Από $\Delta^3 y = 3!\, a_3 h^3 = 6$ με $h = 1$ προκύπτει $a_3 = 1$. (Τα δεδομένα προέρχονται από το $y = x^3 - 2x^2 + 3$.)

Λύση της Άσκησης 3.2. Με $y_0 = 2$, $y_1 = 3$, $y_2 = 12$, $y_3 = 35$, $y_4 = 78$:

- $\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 9$ και $\Delta^2 y_0 = 8$ (η διαγώνιος που κατεβαίνει από το y_0)·
- $\nabla y_4 = y_4 - y_3 = 43 = \Delta y_3$, $\nabla^2 y_4 = 20 = \Delta^2 y_2$, $\nabla^3 y_4 = 6 = \Delta^3 y_1$ (η διαγώνιος που ανεβαίνει από το y_4)·
- $\delta^2 y_2 = y_3 - 2y_2 + y_1 = 35 - 24 + 3 = 14 = \Delta^2 y_1$ και $\delta^4 y_2 = \Delta^4 y_0 = 0$ (η οριζόντια γραμμή του y_2).

Σε όλες τις περιπτώσεις η τάξη k της διαφοράς συν ο δείκτης της αντίστοιχης προς τα εμπρός διαφοράς ισούται με τον δείκτη της προς τα πίσω διαφοράς.

Λύση της Άσκησης 3.3.

y	1	3	11	31	69	131
Δ	2	8	20	38	62	
Δ^2	6	12	18	24		
Δ^3	6	6	6			

Οι τρίτες διαφορές είναι σταθερές, άρα ο βαθμός είναι 3. Με $x_0 = 0$, $h = 1$ και $s = x$, ο τύπος του Newton προς τα εμπρός δίνει

$$p(x) = 1 + 2x + 6\,\frac{x(x-1)}{2} + 6\,\frac{x(x-1)(x-2)}{6} = 1 + 2x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 + x + 1.$$

Για την πρόβλεψη επεκτείνουμε κάθε στήλη από τα δεξιά προς τα αριστερά: η επόμενη τρίτη διαφορά είναι 6, άρα η επόμενη δεύτερη $24+6 = 30$, η επόμενη πρώτη $62+30 = 92$ και $y(6) = 131+92 = 223$, όσο δίνει και ο τύπος $(216 + 6 + 1)$.

Λύση της Άσκησης 3.4. Από τον αναλυτικό τύπο, $\Delta^4 y_0 = y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 = 1 - 8 + 6y_2 - 112 + 65 = 6y_2 - 54$. Η συνθήκη $\Delta^4 y_0 = 0$ δίνει $y_2 = 9$ (τα δεδομένα είναι του $y = x^3 + 1$). Η ίδια ιδέα χρησιμοποιείται για τη διόρθωση λανθασμένων τιμών (Παράδειγμα 3.5).

Λύση της Άσκησης 3.5.

x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	1			
		$\frac{3-1}{1-0} = 2$		
1	3		$\frac{5-2}{3-0} = 1$	
		$\frac{13-3}{3-1} = 5$		$\frac{1-1}{4-0} = 0$
3	13		$\frac{8-5}{4-1} = 1$	
		$\frac{21-13}{4-3} = 8$		
4	21			

Οι συντελεστές Newton είναι τα πρώτα στοιχεία κάθε στήλης, $1, 2, 1, 0$:

$$p(x) = 1 + 2(x-0) + 1\cdot(x-0)(x-1) + 0 = x^2 + x + 1.$$

Επειδή η τρίτη διαιρεμένη διαφορά είναι μηδέν, τα τέσσερα σημεία βρίσκονται πάνω σε πολυώνυμο *δευτέρου* βαθμού.

Λύση της Άσκησης 3.6. (α) Με τη σειρά $x_2 = 3, x_0 = 0, x_1 = 1$: $f[3,0] = \frac{1-13}{0-3} = 4$, $f[0,1] = 2$ και $f[3,0,1] = \frac{2-4}{1-3} = 1$, όπως πριν. (β) Για τα δεδομένα της Άσκησης 3.1 ($h = 1$): $f[1,2] = 1$, $f[2,3] = 9$, άρα $f[1,2,3] = \frac{9-1}{3-1} = 4 = \frac{8}{2!}$. Ομοίως $f[2,3,4] = \frac{23-9}{2} = 7$ και $f[1,2,3,4] = \frac{7-4}{4-1} = 1 = \frac{6}{3!}$.

Λύση της Άσκησης 3.7. Οι διαφορές τάξης n πολυωνύμου βαθμού n είναι $n!\,a_n h^n$: για το $2x^3 - \ldots$ με $h = 0.2$, $3!\cdot 2\cdot 0.2^3 = 0.096$· για το $x^4 - \ldots$ με $h = 0.5$, $4!\cdot 0.5^4 = 1.5$. Οι όροι χαμηλότερου βαθμού δεν επηρεάζουν το αποτέλεσμα.

Λύση της Άσκησης 3.8. (α) $\Delta a^x = a^{x+h} - a^x = (a^h - 1)a^x$. Η εκθετική συνάρτηση αναπαράγεται από τον τελεστή Δ όπως και από την παραγώγιση ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = \ln a\cdot a^x$)· για $a = 2$, $h = 1$ ο παράγοντας είναι 1, δηλαδή η 2^x παίζει για τις διαφορές τον ρόλο της e^x.

(β) Από την ταυτότητα $\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$ με $A = x+h$, $B = x$. Για $h \to 0$ είναι $\Delta \sin x/h \to \cos x$.

(γ) $\Delta x^{(n)} = (x+h)x(x-h)\cdots(x-(n-2)h) - x(x-h)\cdots(x-(n-1)h)$. Ο κοινός παράγοντας είναι $x(x-h)\cdots(x-(n-2)h) = x^{(n-1)}$ και μένει $(x+h) - (x-(n-1)h) = nh$. Η σχέση είναι το ανάλογο του κανόνα $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$· γι' αυτό οι παραγοντικές δυνάμεις είναι η φυσική βάση για πράξεις με διαφορές (Άσκηση 3.24).

3.6.2 Ομάδα Β

Λύση της Άσκησης 3.11.

τάξη k	ακριβείς τιμές	στρογγυλευμένες	φράγμα $2^k \cdot 0.5 \times 10^{-4}$
1	9.98×10^{-2}	9.98×10^{-2}	1.0×10^{-4}
2	7.83×10^{-3}	7.70×10^{-3}	2.0×10^{-4}
3	9.88×10^{-4}	1.20×10^{-3}	4.0×10^{-4}
4	7.16×10^{-5}	5.00×10^{-4}	8.0×10^{-4}
5	9.67×10^{-6}	6.00×10^{-4}	1.6×10^{-3}
6	6.43×10^{-7}	9.00×10^{-4}	3.2×10^{-3}
7	9.37×10^{-8}	1.20×10^{-3}	6.4×10^{-3}
8	5.63×10^{-9}	1.40×10^{-3}	1.3×10^{-2}

Οι ακριβείς διαφορές μειώνονται περίπου κατά $h = 0.1$ σε κάθε τάξη, όπως προβλέπει η σχέση $\Delta^k f \approx h^k f^{(k)}$. Οι διαφορές των στρογγυλευμένων τιμών ακολουθούν τις ακριβείς μέχρι την τρίτη τάξη· από την τέταρτη και μετά *αυξάνουν* και δεν έχουν καμία σχέση με τη συνάρτηση: είναι διαφορές των σφαλμάτων στρογγύλευσης. Μένουν πάντοτε κάτω από το φράγμα $2^k\delta$, χωρίς να το φτάνουν, επειδή τα σφάλματα δεν έχουν τη δυσμενέστερη δυνατή κατανομή προσήμων.

Λύση της Άσκησης 3.12. Το πρόγραμμα βρίσκει τη μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή τέταρτη διαφορά, $\Delta^4 y_i$· το σφάλμα βρίσκεται στην κεντρική τιμή της, y_{i+2}, και ισούται με $\Delta^4 y_i/6$. Για τα δεδομένα της άσκησης οι τέταρτες διαφορές είναι $36, -144, 216, -144, 36$, άρα $i = 2$, η λανθασμένη τιμή είναι η $y_4 = 240$ με σφάλμα $216/6 = 36$ και η σωστή τιμή είναι 204.

Αν το σφάλμα βρίσκεται στις δύο πρώτες ή στις δύο τελευταίες τιμές, το σχήμα $(1, -4, 6, -4, 1)$ εμφανίζεται κομμένο και η μεγαλύτερη διαφορά που υπάρχει στον πίνακα δεν είναι η 6ε: για σφάλμα στο y_0 εμφανίζεται μόνο ο όρος ε στη $\Delta^4 y_0$, για σφάλμα στο y_1 οι -4ε και ε. Η θέση αναγνωρίζεται τότε από το ποιοι συντελεστές λείπουν, ή χρησιμοποιούνται διαφορές χαμηλότερης τάξης. Η μέθοδος προϋποθέτει επίσης ότι οι «σωστές» τέταρτες διαφορές είναι αμελητέες σε σχέση με το σφάλμα.

Λύση της Άσκησης 3.13. Στο βήμα j το c_i πρέπει να γίνει $f[x_{i-j}, \ldots, x_i]$ και χρειάζεται τις τιμές c_i και c_{i-1} του *προηγούμενου* βήματος. Αν ο βρόχος εκτελούνταν από μικρό προς μεγάλο i, το c_{i-1} θα είχε ήδη αντικατασταθεί από τη νέα του τιμή· από το τέλος προς την αρχή κάθε στοιχείο χρησιμοποιείται πριν αλλάξει. Στο τέλος $c_k = f[x_0, \ldots, x_k]$. Για την $f(x) = 1/x$:

$$c = (1,\ -0.5,\ 0.125,\ -0.025,\ 0.003125),$$

σε συμφωνία με τον τύπο $f[x_0, \ldots, x_k] = (-1)^k/(x_0 x_1 \cdots x_k)$ που ισχύει για την $1/x$. Το πολυώνυμο δίνει $p(3) = 0.3125$ έναντι $1/3 = 0.3333$: σφάλμα 6%, επειδή η $1/x$ μεταβάλλεται γρήγορα στο $[1, 8]$ και τα σημεία είναι αραιά.

Λύση της Άσκησης 3.14.

όροι	εκτίμηση της $f'(0)$	σφάλμα
1	1.05170918	5.2×10^{-2}
2	0.99640457	3.6×10^{-3}
3	1.00028220	2.8×10^{-4}
4	0.99997634	2.4×10^{-5}
5	1.00000207	2.1×10^{-6}

Κάθε επιπλέον όρος μειώνει το σφάλμα περίπου κατά τον παράγοντα $h = 0.1$: ο τύπος με m όρους έχει σφάλμα τάξης h^m και είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού m. Το σφάλμα εναλλάσσει πρόσημο, επειδή η σειρά είναι εναλλασσόμενη. Ο τύπος με έναν όρο είναι η απλή προς τα εμπρός διαφορά· με δύο όρους, $\big(-3y_0 + 4y_1 - y_2\big)/(2h)$ (Κεφάλαιο 7).

Octave/MATLAB `sol_methods.m`

```
% Solutions 3.11–3.14 (group B)
fprintf('--- 3.11 growth of rounding noise\n');
x  = 0.1 * (0:10);
De = diff_table(sin(x), 8);
Dr = diff_table(round(sin(x) * 1e4) / 1e4, 8);       % 4 decimal places
for k = 1:8
  fprintf('k = %d: exact %.2e  rounded %.2e  noise bound %.2e\n', k, ...
          max(abs(De(1:11 - k, k + 1))), max(abs(Dr(1:11 - k, k + 1))), 2^k * 0.5e-4);
end

fprintf('--- 3.12 automatic correction of a table\n');
y = [300 279 256 231 240 175 144 111 76];
D = diff_table(y, 4);
[~, i] = max(abs(D(1:5, 5)));
m = i + 2;  err = D(i, 5) / 6;
fprintf('wrong entry: index %d, value %.0f, error %+.1f, corrected %.0f\n', m - 1, y(m),
    err, y(m) - err);

fprintf('--- 3.13 divided differences in place\n');
xs = [1 2 4 5 8];
c  = 1 ./ xs;                                % f(x) = 1/x
n  = numel(xs);
for j = 1:n - 1                              % one array is enough
  for i = n:-1:j + 1
    c(i) = (c(i) - c(i - 1)) / (xs(i) - xs(i - j));
  end
end
fprintf('coefficients:');  fprintf(' %.6f', c);  fprintf('\n');
fprintf('p(3) = %.6f,  1/3 = %.6f\n', newton_eval(xs, c, 3), 1 / 3);

fprintf('--- 3.14 derivative from forward differences\n');
h = 0.1;
D = diff_table(exp((0:5) * h), 5);
s = 0;  sgn = 1;
for k = 1:5
  s = s + sgn * D(1, k + 1) / k;             % hD = Delta - Delta^2/2 + Delta^3/3 - ...
  sgn = -sgn;
  fprintf('%d terms: f''(0) = %.8f  error %.1e\n', k, s / h, abs(s / h - 1));
end
```

Έξοδος

```
--- 3.11 growth of rounding noise
k = 1: exact 9.98e-02  rounded 9.98e-02  noise bound 1.00e-04
k = 2: exact 7.83e-03  rounded 7.70e-03  noise bound 2.00e-04
k = 3: exact 9.88e-04  rounded 1.20e-03  noise bound 4.00e-04
k = 4: exact 7.16e-05  rounded 5.00e-04  noise bound 8.00e-04
k = 5: exact 9.67e-06  rounded 6.00e-04  noise bound 1.60e-03
k = 6: exact 6.43e-07  rounded 9.00e-04  noise bound 3.20e-03
k = 7: exact 9.37e-08  rounded 1.20e-03  noise bound 6.40e-03
k = 8: exact 5.63e-09  rounded 1.40e-03  noise bound 1.28e-02
--- 3.12 automatic correction of a table
wrong entry: index 4, value 240, error +36.0, corrected 204
--- 3.13 divided differences in place
coefficients: 1.000000 -0.500000 0.125000 -0.025000 0.003125
p(3) = 0.312500,  1/3 = 0.333333
```

```
--- 3.14 derivative from forward differences
1 terms: f'(0) = 1.05170918  error 5.2e-02
2 terms: f'(0) = 0.99640457  error 3.6e-03
3 terms: f'(0) = 1.00028220  error 2.8e-04
4 terms: f'(0) = 0.99997634  error 2.4e-05
5 terms: f'(0) = 1.00000207  error 2.1e-06
```

3.6.3 Ομάδα Γ

Λύση της Άσκησης 3.16. Για $k=1$ ο τύπος είναι ο ορισμός, $\Delta y_i = y_{i+1}-y_i$. Αν ισχύει για k, τότε

$$\Delta^{k+1} y_i = \Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \big(y_{i+1+j} - y_{i+j}\big).$$

Ο συντελεστής του y_{i+j} είναι

$$(-1)^{k-j+1}\binom{k}{j-1} - (-1)^{k-j}\binom{k}{j} = (-1)^{k+1-j}\left[\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}\right] = (-1)^{k+1-j}\binom{k+1}{j},$$

από τον κανόνα του τριγώνου του Pascal. Άρα ο τύπος ισχύει και για $k+1$.

Λύση της Άσκησης 3.17. Από το διωνυμικό ανάπτυγμα, $\Delta x^m = (x+h)^m - x^m = mh\,x^{m-1} + \binom{m}{2}h^2 x^{m-2} + \dots$, πολυώνυμο βαθμού $m-1$ με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου mh. Επειδή ο Δ είναι γραμμικός,

$$\Delta p = a_n\,\Delta x^n + a_{n-1}\,\Delta x^{n-1} + \cdots = n\,a_n h\,x^{n-1} + (\text{όροι βαθμού} \le n-2).$$

Κάθε εφαρμογή του Δ μειώνει λοιπόν τον βαθμό κατά ένα και πολλαπλασιάζει τον κύριο συντελεστή με (βαθμός) $\times h$. Μετά από n εφαρμογές μένει η σταθερά $a_n \cdot n(n-1)\cdots 1 \cdot h^n = n!\,a_n h^n$, και η διαφορά μιας σταθεράς είναι μηδέν.

Λύση της Άσκησης 3.18. Για $k=1$: $\Delta f(x) = f(x+h)-f(x) = h\,f'(\xi)$ από το θεώρημα μέσης τιμής. Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για την τάξη $k-1$ και για κάθε συνάρτηση της κλάσης C^{k-1}. Θέτουμε $g(x) = \Delta^{k-1} f(x)$, που είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = \Delta^{k-1} f'(x)$ (η παραγώγιση αντιμετατίθεται με τις διαφορές). Τότε

$$\Delta^k f(x) = g(x+h) - g(x) = h\,g'(\eta) = h\,\Delta^{k-1} f'(\eta), \qquad \eta \in (x, x+h),$$

και από την υπόθεση της επαγωγής για την f': $\Delta^{k-1} f'(\eta) = h^{k-1} f^{(k)}(\xi)$ με $\xi \in (\eta, \eta+(k-1)h) \subset (x, x+kh)$. Άρα $\Delta^k f(x) = h^k f^{(k)}(\xi)$.

Λύση της Άσκησης 3.19. Για $n=1$: $f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$. Έστω ότι ο τύπος ισχύει για n σημεία. Στον ορισμό

$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{f[x_1,\dots,x_n] - f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

ο συντελεστής του $f(x_i)$, για $0<i<n$, είναι

$$\frac{1}{x_n-x_0}\left[\frac{1}{\prod_{j\neq i,\, j\ge 1}(x_i-x_j)} - \frac{1}{\prod_{j\neq i,\, j\le n-1}(x_i-x_j)}\right] = \frac{(x_i-x_0)-(x_i-x_n)}{(x_n-x_0)\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)} = \frac{1}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)},$$

και για $i=0$ ή $i=n$ υπάρχει μόνο ένας από τους δύο όρους και το αποτέλεσμα είναι το ίδιο. Το άθροισμα που προκύπτει δεν αλλάζει με αναδιάταξη των σημείων (αλλάζει μόνο η σειρά των προσθετέων), άρα η διαιρεμένη διαφορά είναι συμμετρική συνάρτηση των ορισμάτων της.

Λύση της Άσκησης 3.20. Η $e(x) = f(x) - p_n(x)$ μηδενίζεται στα $n+1$ σημεία $x_0, \dots, x_n$. Από το θεώρημα του Rolle η e' έχει τουλάχιστον n ρίζες ανάμεσά τους, η e'' τουλάχιστον $n-1$ κ.ο.κ., και η $e^{(n)}$ τουλάχιστον μία, έστω ξ. Επειδή p_n είναι πολυώνυμο βαθμού n με κύριο συντελεστή $f[x_0, \dots, x_n]$, η n-οστή παράγωγός του είναι η σταθερά $n!\, f[x_0, \dots, x_n]$, οπότε

$$0 = e^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - n!\, f[x_0, \dots, x_n].$$

Όταν όλα τα σημεία τείνουν στο x_0, και το ξ τείνει στο x_0: $f[x_0, \dots, x_0] = f^{(n)}(x_0)/n!$, ο συντελεστής Taylor. Η μορφή Newton γίνεται τότε το πολυώνυμο Taylor· με αυτή την έννοια η παρεμβολή γενικεύει το ανάπτυγμα Taylor σε διακεκριμένα σημεία.

Λύση της Άσκησης 3.21. Για $k=1$: $f[x_0, x_1] = (y_1 - y_0)/h = \Delta y_0/(1!\, h)$. Αν ο τύπος ισχύει για $k-1$ (και για οποιοδήποτε αρχικό σημείο), τότε, αφού $x_k - x_0 = kh$,

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{kh} = \frac{\Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0}{(k-1)!\, h^{k-1} \cdot kh} = \frac{\Delta^k y_0}{k!\, h^k}.$$

Με $x = x_0 + sh$ είναι $(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) = h^k\, s(s-1)\cdots(s-k+1)$, άρα ο όρος τάξης k της μορφής Newton γίνεται

$$\frac{\Delta^k y_0}{k!\, h^k}\, h^k\, s(s-1)\cdots(s-k+1) = \binom{s}{k} \Delta^k y_0,$$

που είναι ο τύπος του Newton προς τα εμπρός.

Λύση της Άσκησης 3.22. (α) Ο Δ^k είναι γραμμικός, άρα το σφάλμα των διαφορών ισούται με τις διαφορές του σφάλματος, δηλαδή της ακολουθίας $(\dots, 0, \varepsilon, 0, \dots)$. Από τον αναλυτικό τύπο (Άσκηση 3.16), η $\Delta^k y_i$ περιέχει το y_m με συντελεστή $(-1)^{k-j}\binom{k}{j}$, όπου $j = m - i$: καθώς το i διατρέχει τις τιμές $m-k, \dots, m$ εμφανίζονται διαδοχικά οι συντελεστές της γραμμής k του τριγώνου του Pascal με εναλλασσόμενα πρόσημα.

(β) $\left|\sum_j (-1)^{k-j}\binom{k}{j} e_{i+j}\right| \le \delta \sum_j \binom{k}{j} = 2^k \delta$. Η ισότητα ισχύει όταν τα σφάλματα έχουν μέγιστο μέγεθος και εναλλασσόμενα πρόσημα, $e_{i+j} = (-1)^j \delta$.

(γ) Οι πραγματικές διαφορές είναι περίπου $h^k |f^{(k)}| \le h^k = 10^{-k}$ και ο θόρυβος έως $2^k \cdot 0.5 \times 10^{-4}$. Για $k=3$: 10^{-3} έναντι 4×10^{-4}, οριακά αποδεκτό. Για $k=4$: 10^{-4} έναντι 8×10^{-4}, ο θόρυβος υπερισχύει. Η μεγαλύτερη χρήσιμη τάξη είναι η τρίτη, όπως ακριβώς έδειξε το πείραμα της Άσκησης 3.11. Γενικά, το κριτήριο $(h/2)^k |f^{(k)}| \gtrsim \delta$ καθορίζει πόσες στήλες του πίνακα έχουν νόημα.

Λύση της Άσκησης 3.23. (α) $\Delta\nabla = (E-1)(1-E^{-1}) = E - 2 + E^{-1}$ και $\delta^2 = (E^{1/2} - E^{-1/2})^2 = E - 2 + E^{-1}$· οι τελεστές αντιμετατίθενται, αφού είναι όλοι πολυώνυμα του E. Πράγματι $(E - 2 + E^{-1}) y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$. Ο δεύτερος τύπος είναι το διωνυμικό ανάπτυγμα του $(E-1)^k$, δηλαδή η Άσκηση 3.16.

(β) Το ανάπτυγμα Taylor γράφεται

$$Ef(x) = f(x+h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!} D^m f(x) = e^{hD} f(x).$$

Άρα $1 + \Delta = e^{hD}$ και $1 - \nabla = E^{-1} = e^{-hD}$, οπότε

$$hD = \ln(1+\Delta) = \Delta - \tfrac{1}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{3}\Delta^3 - \tfrac{1}{4}\Delta^4 + \dots, \qquad hD = -\ln(1-\nabla) = \nabla + \tfrac{1}{2}\nabla^2 + \tfrac{1}{3}\nabla^3 + \dots$$

Οι σχέσεις είναι τυπικές (ισχύουν ακριβώς για πολυώνυμα, όπου οι σειρές είναι πεπερασμένες) και χρησιμοποιήθηκαν στην Άσκηση 3.14.

(γ) Υψώνοντας τη σειρά στο τετράγωνο και κρατώντας όρους έως Δ^4:

$$h^2 D^2 = \left(\Delta - \tfrac{1}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{3}\Delta^3\right)^2 = \Delta^2 - \Delta^3 + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3}\right)\Delta^4 - \dots = \Delta^2 - \Delta^3 + \tfrac{11}{12}\Delta^4 - \dots$$

δηλαδή $h^2 f''(x_0) \approx \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0$.

Λύση της Άσκησης 3.24. (α) Το άθροισμα είναι τηλεσκοπικό: $(f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \cdots + (f_n - f_{n-1}) = f_n - f_0$.

(β) Από την Άσκηση 3.8(γ) με $h = 1$, $\Delta k^{(m+1)} = (m+1)\, k^{(m)}$, δηλαδή $k^{(m)} = \Delta\big[k^{(m+1)}/(m+1)\big]$. Από το (α), με άνω όριο $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^{(m)} = \frac{(n+1)^{(m+1)} - 0^{(m+1)}}{m+1} = \frac{(n+1)^{(m+1)}}{m+1},$$

το ανάλογο του $\int_0^n x^m \,\mathrm{d}x = n^{m+1}/(m+1)$.

(γ) Ισχύει $k^3 = k^{(3)} + 3k^{(2)} + k^{(1)}$, αφού $k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k = k^3 - 3k^2 + 2k + 3k^2 - 3k + k$. Επομένως

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^3 &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4}\big[(n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2\big] = \frac{n(n+1)}{4}\,(n^2+n) = \Big[\frac{n(n+1)}{2}\Big]^2.\end{aligned}$$

3.6.4 Υποδείξεις για τις υπόλοιπες ασκήσεις

3.9 Η κλιμακωτή διάταξη έχει $2n+1$ γραμμές. Στη γραμμή r ($r = 0, 1, \ldots, 2n$) τυπώνονται οι διαφορές $\Delta^j y_i$ με $2i + j = r$: στις άρτιες γραμμές οι άρτιες τάξεις (και το $x_{r/2}$), στις περιττές οι περιττές.

3.10 Αποθηκεύστε $B_{j,i} = \nabla^j y_i$ για $i \geq j$, με $B_{j,i} = B_{j-1,i} - B_{j-1,i-1}$. Η σύγκριση με τη `diff_table` πρέπει να δίνει ακριβώς μηδενική διαφορά, αφού εκτελούνται οι ίδιες αφαιρέσεις.

3.15 Οι διαφορές είναι $1, 4, 9, 16\cdot\, 3, 5, 7\cdot\, 2, 2$. Άρα $S_n = \binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Για το $\sum k^m$ χρειάζονται $m+2$ τιμές και διαφορές έως την τάξη $m+1$.